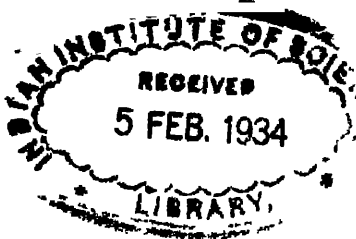
Mathematische Schwingungslehre

Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sowie einiges über partielle Differentialgleichungen und Differenzengleichungen

Von

Dr. Erich Schneider

Mit 49 Textabbildungen

Berlin
Verlag von Julius Springer
1924

Vorwort.

Das Buch behandelt die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit Rücksicht auf ihre Anwendungen in Physik und Technik, ohne jedoch selbst Anwendungen zu geben. Nur Pendel, Doppelpendel und Wage sind etwas näher erörtert, um die Theorie zu illustrieren, im übrigen sei aber bezüglich der Anwendungen verwiesen auf:

Hort: Technische Schwingungslehre. Berlin: Julius Springer,

und auf folgende Lehrbücher:

Abraham: Theorie der Elektrizität. Leipzig: B. G. Teubner. — Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Leipzig: B. G. Teubner. — Hamel. Elementare Mechanik. Leipzig: B. G. Teubner. — Lorenz: Technische Physik. München und Berlin: Oldenbourg. — Love: Lehrbuch der Elastizität. Leipzig: B. G. Teubner. — Schaefer: Einführung in die theoretische Physik. Leipzig. Veit & Comp.

Diese Bücher werden im Text häufig zitiert werden.

Von den Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten enthält das Buch im IV. Kapitel nur diejenigen, die sich auf Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zurückführen lassen. Bezüglich der Schwingungsprobleme, die auf andere Differentialgleichungen führen, sei verwiesen auf

Duffing, G.. Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig: Vieweg & Sohn. — Hamel, G.: Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden. Math. Ann. 86, 1922. — Hamel, G.: Über die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann. 73, 1912,

sowie auch auf die Lehrbücher der Besselschen Funktionen.

Im V. Kapitel sollte bloß gezeigt werden, wie sich die partiellen Differentialgleichungen auf gewöhnliche zurückführen lassen.

Im übrigen sei bezüglich der partiellen Differentialgleichungen verwiesen auf:

Weber: Die partiellen Differentialgleichungen der theoretischen Physik. Braunschweig: Vieweg & Sohn.

Im VI. Kapitel wird gezeigt, daß sich die Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten in analoger Weise behandeln lassen wie die Differentialgleichungen. Weitere Literatur über Differenzengleichungen findet man in

Funk: Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Theorie der Baukonstruktionen. Berlin: Julius Springer.

Berlin, im Oktober 1923.

E. Schneider.

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel. Gewöhnliche Differentialgleichungen; Schwingungen bei einem Freiheitsgrade.

A. Homogene Gleichungen; freie Schwingungen

B Inhomogene Gleichungen; erzwungene Schwingungen.

II. Kapitel. Systeme von 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen; Schwingungen bei 2 Freiheitsgraden.

III. Kapitel. Systeme von mehr als 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen; Schwingungen bei mehr als 2 Freiheitsgraden

IV. Kapitel. Differentialgleichungen, die sich auf solche mit konstanten Koeffizienten zurückführen lassen.

V. Kapitel. Partielle Differentialgleichungen; Schwingungen stetig zusammenhängender Systeme.

VI. Kapitel. Differenzengleichungen.

I. Kapitel.
Gewöhnliche Differentialgleichungen[1]).

§ 1. $a\ddot{y} + cy = 0$.

Die Gleichung ist die Differentialgleichung der ungedampften Schwingung Die Punkte bedeuten Differentiationen nach der Zeit. a und c sollen beide positiv sein $a\ddot{y}$ ist das Beschleunigungsglied und cy das Kraftglied Das Integral der Differentialgleichung ist

$$y = K \cos \omega t + L \sin \omega t . \tag{1}$$

Hierbei sind K und L willkurliche Konstanten und ω ist so zu bestimmen, daß die Differentialgleichung erfüllt wird Zu dem Zweck bilde ich

$$\begin{aligned} y &= \omega(-K \sin \omega t + L \cos \omega t) , \\ \ddot{y} &= -\omega^2 y . \end{aligned} \tag{2}$$

Setze ich (2) in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$-a\omega^2 + c = 0 . \tag{3}$$

Daraus folgt

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{a}} . \tag{4}$$

Die Konstanten K und L mussen nun aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Ist zur Zeit $t = 0$ $y = y_0$ und $\dot{y} = \dot{y}_0$, so ist

$$\begin{aligned} y_0 &= K , \\ y_0 &= \omega L \end{aligned} \tag{5}$$

Daraus ergibt sich

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{y_0}{\omega} \sin \omega t \tag{6}$$

---

[1]) Vgl. zu diesem Kapitel das 3 Kapitel im Forsyth, „Lehrbuch der Differentialgleichungen“, Braunschweig, Vieweg & Sohn Die dort benutzte symbolische Methode ist aber wohl nicht nach jedermanns Geschmack.

Führe ich statt der Konstanten K und L neue Konstante k und $\varkappa$ ein durch die Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{aligned} K &= k \sin \varkappa \\ L &= k \cos \varkappa, \end{aligned}$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} k &= \sqrt{K^2 + L^2} \\ \operatorname{tg} \varkappa &= \frac{K}{L}, \end{aligned}$$

so kann ich (1) auf die folgende Form bringen·

$$(9)\qquad y = k \sin(\varkappa + \omega t).$$

Das ist eine sog Sinusschwingung (Abb 1). k ist die Amplitude, $\varkappa + \omega t$ die Phase und ω die Frequenz Fur die Schwingungsdauer τ ergibt sich·

$$(10)\qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{c}}.$$

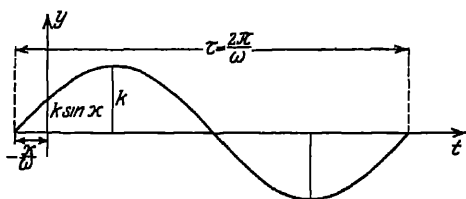



Abb. 1.

Ändere ich in (9) die willkürliche Konstante $\varkappa$ um $\frac{\pi}{2}$, so tritt an Stelle des sin der cos

Sind x und y 2 Losungen unserer Differentialgleichung, so ist auch $z = x + iy$ eine Losung, weil die Koeffizienten a und c der Differentialgleichung reell sind Man kann den Vorgang geometrisch ubersichtlich darstellen, wenn man sich dieser Lösung z bedient Ich schreibe

$$(11)\qquad x = k \cos(\varkappa + \omega t)$$

$$(12)\qquad iy = ik \sin(\varkappa + \omega t)$$

und addiere

$$(13)\qquad x + iy = z = k[\cos(\varkappa + \omega t) + i \sin(\varkappa + \omega t)] = k e^{i(\varkappa + \omega t)}$$

Jede komplexe Zahl kann man nun als einen Punkt P darstellen oder, wie man auch sagen kann, als einen vom Koordinatenanfangspunkt ausgehenden Vektor OP Unser Vektor z hat die Länge k und schließt mit der Achse des Reellen den Winkel $(\varkappa + \omega t)$ ein Mit der Zeit t dreht er sich also aus der Anfangslage $k e^{i\varkappa}$ mit der konstanten Geschwindigkeit ω Die

Punkte Q und R fuhren dabei einfache Schwingungen aus (Abb 2). Aus (13) folgt nun

$$z = i\omega k e^{i(\varkappa + \omega t)} = i\omega z = e^{i\frac{\pi}{2}}\omega z. \tag{14}$$

Durch Differentiation wird also der Vektor z um 90° gedreht und mit ω multipliziert. Durch nochmalige Differentiation ergibt sich

$$\ddot{z} = i\omega z = -\omega^2 z. \tag{15}$$

Durch zweimalige Differentiation wird also der Vektor z um 180° gedreht und mit ω^2 multipliziert. Ich hatte also in unserer Differentialgleichung auch den komplexen Ansatz $z = k e^{i(\varkappa + \omega t)}$ machen konnen und ware dadurch genau so auf die Gl. (3) gekommen

Analog erhalte ich

$$\int z\,dt = \frac{z}{i\omega} = -i\frac{z}{\omega} = e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{z}{\omega} \tag{16}$$

Abb. 2.

Durch Integration wird also der Vektor z um 90° in entgegengesetzter Richtung gedreht und durch ω dividiert

Bilde ich 2 Funktionen

$$\begin{aligned} 2E &= ay^2, \\ 2V &= cy^2, \end{aligned} \tag{17}$$

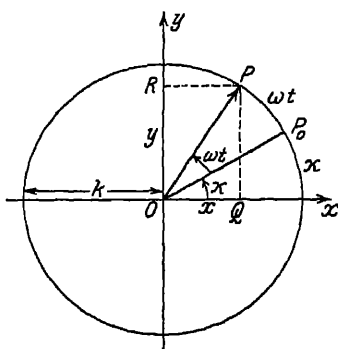
so folgt unsere Differentialgleichung aus der Gleichung

$$\frac{d}{dt}(E + V) = 0. \tag{18}$$

In der Physik stellt die Gl. (18) den Satz von der Erhaltung der Energie dar.

Beispiele.

I Bei mechanischen Schwingungen bedeutet E die kinetische Energie und V die potentielle Energie

1. Hangt an einem elastischen Stabe eine Masse m und fuhrt Schwingungen aus, so gilt unsere Differentialgleichung nach dem Hookschen Gesetz, falls die Masse m gegen die Masse des Stabes vernachlassigt werden kann Die Zahl a ist gleich der angehängten Masse m und das c ist je nach der Befestigungsart verschieden Vgl Hutte, Des Ingenieurs Taschenbuch (Berlin,

Ernst & Sohn) I, 547, wo die Durchbiegung angegeben ist. D Durchbiegung ist aber $\frac{m}{c}$.

Ähnliche Verhaltnisse liegen bei Spiralfedern vor. Vg Hutte, I, 597.

2 Bei Drehschwingungen ergibt sich zunächst die Gleichun

$$a\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\sin\varphi = 0,$$

wobei a das Tragheitsmoment und c die Direktionskraft ist Is nun aber φ so klein, daß der sin durch den arc ersetzt werden kanı so geht die obige Gleichung in die Gleichung unseres Paragraphe uber: Fadenpendel (Hamel· El M Nr 66, Hort: T. Schw. § 1 physisches Pendel (Hamel: El. M Nr. 195, Hort. T Schw. § 3, Bifilarpendel (Hort T. Schw § 4), Magnetnadel im Magnetfeld (Hort T. Schw § 4), Rollpendel (Hamel: El. M. Nr. 241).

3. Bei Torsionsschwingungen eines Drahtes, an dem ein Masse hangt, gilt unsere Differentialgleichung, falls das Trägheits moment des Drahtes vernachlässigt werden kann gegen das de angehangten Masse (Schäfer· Th Ph. I, 532).

II. Bei elektrischen Schwingungen ist

$$E = \tfrac{1}{2} L\dot{Q}^2 = \tfrac{1}{2} L J^2$$

die magnetische Energie, wobei L der Koeffizient der Selbst induktion, Q die Elektrizitätsmenge und $\dot{Q} = J$ die Strom stärke ist.

$$V = \frac{1}{2K} Q^2$$

ist die elektrische Energie, wobei K die Kapazität ist (Abraham: Th. d. El. § 40 und 63)

Die Differentialgleichung lautet demnach

$$L\ddot{Q} + \frac{1}{K} Q = 0$$

oder

$$L\ddot{J} + \frac{1}{K} J = 0$$

Die Formel (10) wird

$$\tau = 2\pi\sqrt{LK} \text{ (Thomsonsche Formel).}$$

Unsere Differentialgleichung hat wie alle homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten die Eigentümlichkeit, daß durch Differentiation eine neue Gleichung derselben Ar

entsteht. $ay + cy = 0$, in der nur y durch y ersetzt ist. Es gilt also bei mechanischen Schwingungen dieselbe Differentialgleichung für die Elongation, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung. Bei elektrischen Schwingungen gilt dieselbe Differentialgleichung für die Elektrizitätsmenge Q und die Stromstärke $J = Q$.

§ 2. Grenzbedingungen.

Die Differentialgleichung des vorigen § tritt auch auf bei Problemen, wo sich zunächst eine partielle Differentialgleichung ergibt, die dann aber auf unsere totale Differentialgleichung zurückgeführt wird. Vgl. V § 1. Die unabhängige Variable ist dann meist nicht die Zeit t, sondern eine räumliche Koordinate x Ich schreibe daher das Integral § 1 (9)

$$y = k \sin(\varkappa + \omega x) . \tag{1}$$

An Stelle der Anfangsbedingungen für $t = 0$ treten hier Grenzbedingungen für $x = 0$ und $x = 1$

Es sind dabei folgende 4 Grenzbedingungen wichtig:

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{a)} & y(0) = 0, & y(1) = 0, \\ \text{b)} & y(0) = 0, & y'(1) = 0, \\ \text{c)} & y'(0) = 0, & y(1) = 0, \\ \text{d)} & y'(0) = 0, & y'(1) = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

Diese Grenzbedingungen treten z B auf bei Longitudinalschwingungen von Stäben, je nachdem die Enden frei oder fest sind, bei Luftschwingungen in Röhren, je nachdem die Röhrenenden offen oder geschlossen sind und bei Wärmebewegungen in Stäben, je nachdem die Stabenden auf der konstanten Temperatur 0 gehalten oder wärmeundurchlässig bedeckt sind Die Bedingungen für die Integrationskonstanten k und $\varkappa$ werden in den 4 Fällen.

$$\left\{\begin{array}{lrr} \text{a)} & k \sin\varkappa = 0, & k \sin(\varkappa + \omega) = 0, \\ \text{b)} & k \sin\varkappa = 0, & \omega k \cos(\varkappa + \omega) = 0, \\ \text{c)} & \omega k \cos\varkappa = 0, & k \sin(\varkappa + \omega) = 0, \\ \text{d)} & \omega k \cos\varkappa = 0, & \omega k \cos(\varkappa + \omega) = 0. \end{array}\right. \tag{3}$$

Diese Gleichungen sind natürlich, wenn ω nicht besondere Werte hat, nur durch $k = 0$ zu erfüllen. Es sind nun zwei Fragen von Wichtigkeit

I Welchen Wert muß ω (resp die Konstanten unserer Differentialgleichung) haben, damit die Grenzbedingungen (2) erfüllbar sind?

II Wenn ω diesen Wert nicht hat, welches sind dann unstetigen Funktionen, die unsere Differentialgleichungen und Grenzbedingungen (2) erfullen?

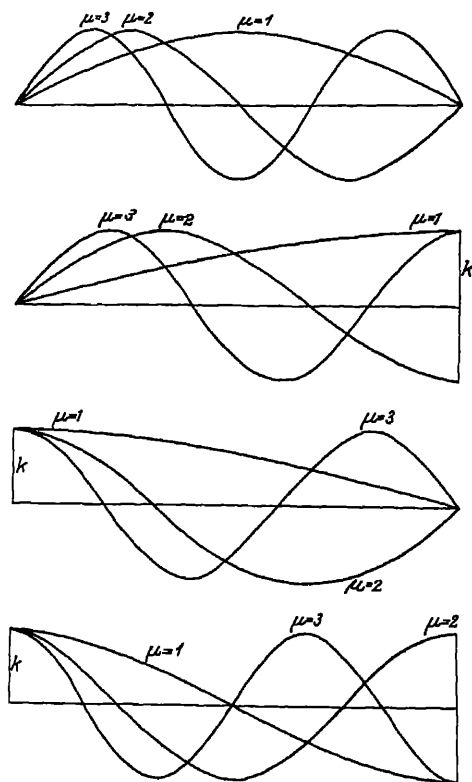



Abb. 3

I. Aus der Gl. (3) ergibt sich fur $\varkappa$ und ω

$$
(4)\quad \begin{cases}
\text{a)}\quad \varkappa = 0, & \omega = \mu\pi, \\
\text{b)}\quad \varkappa = 0, & \omega = (\mu - \tfrac{1}{2})\pi, \\
\text{c)}\quad \varkappa = \dfrac{\pi}{2}, & \omega = (\mu - \tfrac{1}{2})\pi, \qquad (\mu = 1, 2, 3 \quad) \\
\text{d)}\quad \varkappa = \dfrac{\pi}{2}, & \omega = \mu\pi,
\end{cases}
$$

so daß wir folgende Losungen erhalten (Abb. 3).

$$(5)\quad \begin{cases} a) & y = k \sin \mu \pi x, \\ b) & y = k \sin (\mu - \frac{1}{2}) \pi x, \\ c) & y = k \cos (\mu - \frac{1}{2}) \pi x, \\ d) & y = k \cos \mu \pi x. \end{cases} \qquad (\mu = 1, 2, 3 \ldots)$$

II. Um eine unstetige Funktion zu erhalten, die unsere Differentialgleichung und die Grenzbedingungen (2) erfüllt, bilde ich 2 Funktionen:

$$y_1 = k_1 \sin (\varkappa_1 + \omega x),$$
$$y_2 = k_2 \sin (\varkappa_2 + \omega x),$$

von denen y_1 die untere und y_2 die obere Grenzbedingung befriedigt.

$$(6)\quad \begin{cases} a) & \varkappa_1 = 0, & \varkappa_2 = -\omega, \\ b) & \varkappa_1 = 0, & \varkappa_2 = \frac{\pi}{2} - \omega, \\ c) & \varkappa_1 = \frac{\pi}{2}, & \varkappa_2 = -\omega, \\ d) & \varkappa_1 = \frac{\pi}{2}, & \varkappa_2 = \frac{\pi}{2} - \omega \end{cases}$$

Ich nehme nun im Intervall 0 bis 1 einen beliebigen Punkt α an und bilde die unstetige Funktion y derart, daß im Intervall 0 bis α $y = y_1$ und im Intervall α bis 1 $y = y_2$ sein soll. Die Unstetigkeit liegt dann lediglich im Punkte α. Da die Konstanten k_1 und k_2 noch ganz beliebig bleiben, kann ich die Art der Unstetigkeit im Punkte α noch in ganz bestimmter Weise vorschreiben. Es soll dort etwa y selbst stetig sein

$$(7)\quad \begin{gathered} y_1(\alpha) = y_2(\alpha), \\ k_1 \sin (\varkappa_1 + \omega \alpha) = k_2 \sin (\varkappa_2 + \omega \alpha). \end{gathered}$$

Ich kann daher k_1 und k_2 durch eine Konstante k ausdrücken.

$$(8)\quad \begin{aligned} y_1 &= k \sin (\varkappa_2 + \omega \alpha) \sin (\varkappa_1 + \omega x), \\ y_2 &= k \sin (\varkappa_1 + \omega \alpha) \sin (\varkappa_2 + \omega x) \end{aligned}$$

Der Sprung, den die 1. Ableitung an der Stelle α macht, ist

$$y_1'(\alpha) - y_2'(\alpha) = \omega k \sin (\varkappa_2 - \varkappa_1)$$

Ich kann nun k so bestimmen, daß dieser Sprung gerade 1 ist.

$$(9)\quad \begin{gathered} y_1'(\alpha) - y_2'(\alpha) = 1, \\ k = \frac{1}{\omega \sin (\varkappa_2 - \varkappa_1)}. \end{gathered}$$

Demnach ist nach Gl (8)

$$y_1 = \frac{\sin(\varkappa_2 + \omega\alpha)\sin(\varkappa_1 + \omega x)}{\omega \sin(\varkappa_2 - \varkappa_1)},$$

$$y_2 = \frac{\sin(\varkappa_1 + \omega\alpha)\sin(\varkappa_2 + \omega x)}{\omega \sin(\varkappa_2 - \varkappa_1)},$$

oder, wenn ich die Konstanten aus Gl. (6) einsetze·

$$(10)\begin{cases} \text{a)}\ y_1 = \dfrac{\sin\omega(1-\alpha)\sin\omega x}{\omega\sin\omega}, & y_2 = \dfrac{\sin\omega\alpha\sin\omega(1-x)}{\omega\sin\omega} \\ \text{b)}\ y_1 = \dfrac{\cos\omega(1-\alpha)\sin\omega x}{\omega\cos\omega}, & y_2 = \dfrac{\sin\omega\alpha\cos\omega(1-x)}{\omega\cos\omega} \\ \text{c)}\ y_1 = \dfrac{\sin\omega(1-\alpha)\cos\omega x}{\omega\cos\omega}, & y_2 = \dfrac{\cos\omega\alpha\sin\omega(1-x)}{\omega\cos\omega} \\ \text{d)}\ y_1 = \dfrac{\cos\omega(1-\alpha)\cos\omega x}{-\omega\sin\omega}, & y_2 = \dfrac{\cos\omega\alpha\cos\omega(1-x)}{-\omega\sin\omega} \end{cases}$$

Diese Losungen finden im § 16 Verwendung

Ist $c = 0$, so daß wir also die Differentialgleichung

$$(11)\qquad y'' = 0$$

haben, so wird $\omega = 0$ und die Gl (10a), b), c) gehen in die folgenden uber·

$$(12)\begin{cases} \text{a)}\ y_1 = (1-\alpha)x, & y_2 = \alpha(1-x), \\ \text{b)}\ y_1 = x, & y_2 = \alpha, \\ \text{c)}\ y_1 = 1-\alpha, & y_2 = 1-x, \end{cases}$$

Diese Lösungen finden im § 15 Verwendung

Im Falle d) werden y_1 und y_2 unendlich Entwickle ich y_1 und y_2 nach Potenzen, so erhalte ich.

$$y_1 = \frac{\left(1 - \frac{(1-\alpha)^2\omega^2}{2}\right)\left(1 - \frac{\omega^2 x^2}{2}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{6}\right)}{-\omega^2}$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha)^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\right] + \cdots,$$

$$y_2 = \frac{\left(1 - \frac{\alpha^2\omega^2}{2}\right)\left(1 - \frac{(1-x)^2\omega^2}{2}\right)\left(1 + \frac{\omega^2}{6}\right)}{-\omega^2}$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} + \left[\frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}\right] + \cdots$$

Nenne ich die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke η_1 und η_2, so ist

$$(12\,\mathrm{d})\quad \eta_1 = \frac{1}{2}(1-\alpha)^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(1-x)^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{6}.$$

An Stelle der Gl. (11) tritt hier die Gleichung

$$(11\,\mathrm{d})\qquad \eta'' = 1$$

Außerdem erfüllt η die Bedingungen (2 d), (7), (9)

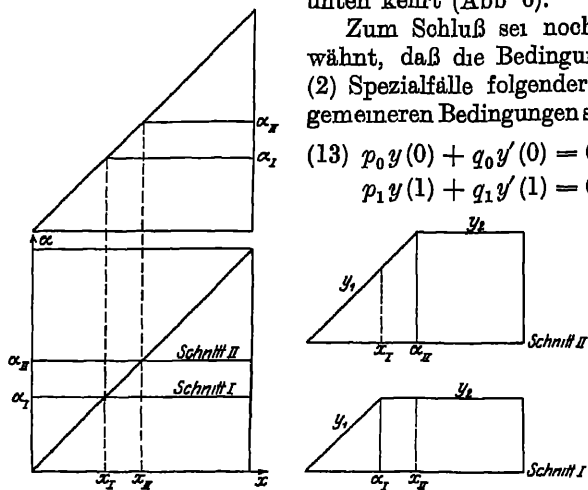
Abb. 4.

Deute ich x und α als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene und y als räumliche Koordinate senkrecht dazu, so stellt (12 a) 2 hyperbolische Paraboloide dar Von ihnen kommt nur der im Innern des Quadrates ($x = 0$, $x = 1$, $\alpha = 0$, $\alpha = 1$) liegende Teil in Betracht Über der Diagonale stoßen die beiden Paraboloide längs einer Parabel in einer scharfen Kante zusammen und sind zu dieser Kante symmetrisch, da y in x und α symmetrisch ist Die Ränder des Quadrats bilden die beiden Scheitelerzeugenden der Paraboloide Es verschwindet dort y (Abb. 4) Deute ich (12 b und c) in ähnlicher Weise, so erhalte ich 2 unter 45° ansteigende Ebenen, die durch die x- und α-Achse hindurchgehen (Abb 5) Deute ich schließlich (12 d), so ergeben sich 2 Rotationsparaboloide Sie schneiden die x, α-Ebene in 2 Kreisen, deren Mittelpunkte die Ecken ($x = 1$, $\alpha = 0$) und ($x = 0$, $\alpha = 1$)

des Quadrates sind und deren Radius $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist Über die gonalen des Quadrates schneiden sich die Paraboloide in (Parabel, die aber im Gegensatz zu (a) ihre konvexe Seite ı unten kehrt (Abb 6).

Abb. 5.

Zum Schluß sei noch wähnt, daß die Bedingu (2) Spezialfälle folgender gemeineren Bedingungen s

$$(13) \quad p_0 y(0) + q_0 y'(0) = (\qquad p_1 y(1) + q_1 y'(1) = ($$

Diese Grenzbedingungen treten z B. bei den Warmebewegun in einem Stabe auf, wenn die Stabenden Warme ausstrahlen

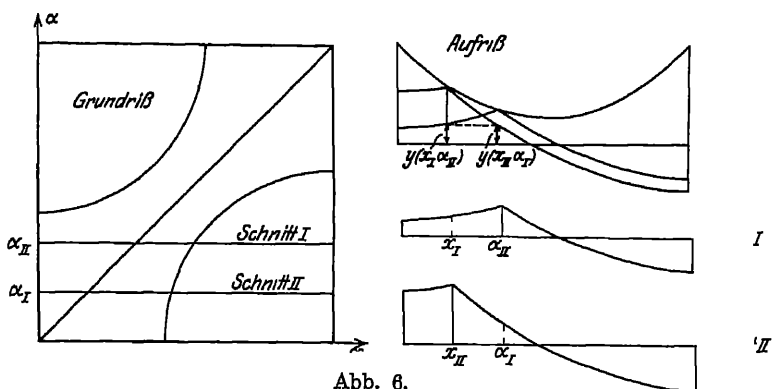



Abb. 6.

ergeben sich bei diesen Grenzbedingungen statt der Gl (6) $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die transzendenten Gleichungen

$$(14) \qquad \operatorname{tg} \varkappa_1 = -\frac{q_0 \omega}{p_0}, \qquad \operatorname{tg}(\varkappa_2 + \omega) = -\frac{q_1 \omega}{p_1}.$$

§ 3. $a\ddot{y} - cy = 0$.

An Stelle der trigonometrischen Funktionen des § 1 treten hier hyperbolische Funktionen a und c sollen wieder positiv sein. Es ist

$$(1)\qquad \begin{aligned} y &= K \operatorname{Cof} \omega t + L \operatorname{Sin} \omega t, \\ \dot{y} &= \omega (K \operatorname{Sin} \omega t + L \operatorname{Cof} \omega t), \end{aligned}$$

$$(2)\qquad \ddot{y} = \omega^2 y,$$

$$(3)\qquad a\omega^2 - c = 0,$$

$$(4)\qquad \omega = \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

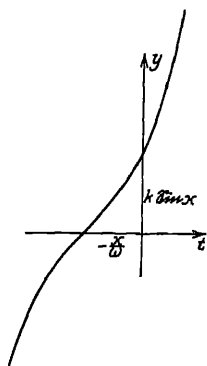
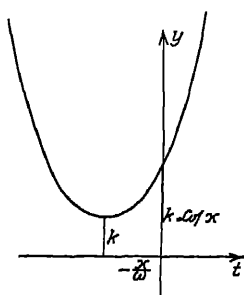



Abb. 7.

Abb. 8.

Soll zur Zeit $t = 0$ $y = y_0$ und $\dot{y} = \dot{y}_0$ sein, so ist.

$$(5)\qquad \begin{aligned} y_0 &= K, \\ \dot{y}_0 &= \omega L, \end{aligned}$$

$$(6)\qquad y = y_0 \operatorname{Cof} \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \operatorname{Sin} \omega t$$

Ich kann nun wieder statt K und L neue Konstanten k und $\varkappa$ einfuhren. Ich muß dabei jedoch 2 Falle unterscheiden.

	$\lvert K\rvert < \lvert L\rvert$		$\lvert K\rvert > \lvert L\rvert$
(7)	$K = k \operatorname{Sin} \varkappa$, $L = k \operatorname{Cof} \varkappa$,	(7′)	$K = k \operatorname{Cof} \varkappa$, $L = k \operatorname{Sin} \varkappa$,
(8)	$k = \sqrt{L^2 - K^2}$, $\operatorname{Tg} \varkappa = \frac{K}{L}$.	(8′)	$k = \sqrt{K^2 - L^2}$, $\operatorname{Tg} \varkappa = \frac{L}{K}$,
(9)	$y = k \operatorname{Sin} (\varkappa + \omega t)$	(9′)	$y = k \operatorname{Cof} (\varkappa + \omega t)$

Bei den trigonometrischen Funktionen kann man es durch Änderung der Konstanten $\varkappa$ um $\frac{\pi}{2}$ erreichen, daß an Stelle des sin der cos tritt Bei den hyperbolischen Funktionen ist das nicht der Fall, die beiden Losungen (9) und (9′) sind wesentlich voneinander verschieden (Abb 7 und 8).

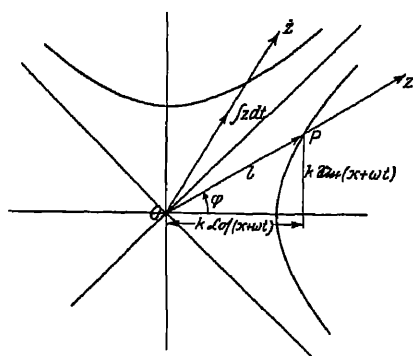
Fur die geometrische Deutung der Losungen (9) und (9′) kann ich entsprechende Überlegungen anstellen wie in § 1 Es ist

$$x = k \operatorname{Cof}(\varkappa + \omega t), \tag{11}$$

$$y = k \operatorname{Sin}(\varkappa + \omega t) \tag{12}$$

Deute ich auch hier x und y als horizontale und vertik
Koordinate eines Punktes P, so durchlauft, wenn t von —
bis $+\infty$ wachst, der Punkt P die gleichseitige Hyperbel

$$x^2 - y^2 = k^2, \tag{13}$$

deren Parametergl (11) und (12) ist, und zwar für positive k d
rechten Zweig, fur negative k den linken Zweig (Abb. 9). Ich w
den Vektor OP dann wieder mit z bezeichnen Hierbei ist jedo
zu bemerken, daß k nicht etwa die Lange des Vektors ist u
$\varkappa + \omega t$ nicht etwa der Wi
kel, den er mit der horizont
len Achse einschließt. Nen
ich diese beiden Größen
und φ, so ist vielmehr

$$l^2 = k^2 \operatorname{Cof} 2(\varkappa + \omega t),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{Tg}(\varkappa + \omega t).$$

Abb. 9

Differenziere ich die Gle
chungen (11) und (12),
erhalte ich

$$\begin{aligned} x &= \omega k \operatorname{Sin}(\varkappa + \omega t) \\ y &= \omega k \operatorname{Cof}(\varkappa + \omega t) \end{aligned} \tag{14}$$

Es werden also horizontale und vertikale Komponente mi
einander vertauscht und außerdem beide mit ω multipliziert
Den Vektor, dessen Komponenten x und y sind, will ich mit
bezeichnen Eine Differentiation von z entspricht dann al
geometrisch eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden d
1. Quadranten und eine Multiplikation mit ω. Wachst t vo
$-\infty$ bis $+\infty$, so durchlauft z die gleichseitige Hyperbel

$$y^2 - x^2 = \omega^2 k^2,$$

und zwar fur positive k den oberen Zweig, fur negative k de
unteren Zweig. Aus (1) folgt durch 2malige Differentiation

$$\begin{aligned} x &= \omega^2 k \operatorname{Cof}(\varkappa + \omega t), \\ y &= \omega^2 k \operatorname{Sin}(\varkappa + \omega t). \end{aligned} \tag{15}$$

Durch eine 2malige Differentiation wird also z in seine
Richtung nicht geandert, sondern nur mit ω^2 multipliziert Schlie
lich folgt aus (11) und (12) noch·

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
\int x\,dt &= \frac{k}{\omega}\,\mathfrak{Sin}\,(\varkappa + \omega t),\\
\int y\,dt &= \frac{k}{\omega}\,\mathfrak{Cof}\,(\varkappa + \omega t).
\end{aligned}
$$

Einer Integration entspricht also eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten und eine Division durch ω.

§ 4. Die Grenzbedingungen im aperiodischen Fall.

Ich ersetze wieder in den Lösungen (9) des vorigen Paragraphen t durch x [illegible]

$$
(1)\quad y = k\,\mathfrak{Sin}\,(\varkappa + \omega x) \qquad \text{oder} \qquad (1')\quad y = k\,\mathfrak{Cof}\,(\varkappa + \omega x)
$$

und betrachte dieselben Grenzbedingungen wie im § 2

$$
(2)\qquad
\begin{cases}
\text{a)} & y(0) = 0, \quad y(1) = 0,\\
\text{b)} & y(0) = 0, \quad y'(1) = 0,\\
\text{c)} & y'(0) = 0, \quad y(1) = 0,\\
\text{d)} & y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.
\end{cases}
$$

Man erkennt, daß diese Grenzbedingungen für keinen Wert von ω durch den Ansatz (1) oder (1′) zu befriedigen sind Ich muß vielmehr die Lösung y aus 2 Lösungen, y_1 und y_2, zusammensetzen, von denen y_1 die untere, y_2 die obere Grenzbedingung befriedigt. Ich bezeichne die Gleichungen mit denselben Nummern wie die entsprechenden Gleichungen im § 2. Im Gegensatz zum § 2 muß ich hier für die 4 Unterfälle von (2) gesonderte Ansätze machen

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad y_1 = k_1\,\mathfrak{Sin}\,(\varkappa_1 + \omega x), \qquad y_2 = k_2\,\mathfrak{Sin}\,(\varkappa_2 + \omega x),\\
&\text{b)} \quad y_1 = k_1\,\mathfrak{Sin}\,(\varkappa_1 + \omega x), \qquad y_2 = k_2\,\mathfrak{Cof}\,(\varkappa_2 + \omega x),\\
&\text{c)} \quad y_1 = k_1\,\mathfrak{Cof}\,(\varkappa_1 + \omega x), \qquad y_2 = k_2\,\mathfrak{Sin}\,(\varkappa_2 + \omega x),\\
&\text{d)} \quad y_1 = k_1\,\mathfrak{Cof}\,(\varkappa_1 + \omega x), \qquad y_2 = k_2\,\mathfrak{Cof}\,(\varkappa_2 + \omega x),
\end{aligned}
$$

Aus den Grenzbedingungen (2) folgt in allen 4 Fällen

$$
(6)\qquad \varkappa_1 = 0, \qquad \varkappa_2 = -\omega,
$$

so daß

$$
\begin{aligned}
&\text{a)} \quad y_1 = k_1\,\mathfrak{Sin}\,\omega x, \qquad y_2 = k_2\,\mathfrak{Sin}\,\omega(x-1),\\
&\text{b)} \quad y_1 = k_1\,\mathfrak{Sin}\,\omega x, \qquad y_2 = k_2\,\mathfrak{Cof}\,\omega(x-1),\\
&\text{c)} \quad y_1 = k_1\,\mathfrak{Cof}\,\omega x, \qquad y_2 = k_2\,\mathfrak{Sin}\,\omega(x-1),\\
&\text{d)} \quad y_1 = k_1\,\mathfrak{Cof}\,\omega x, \qquad y_2 = k_2\,\mathfrak{Cof}\,\omega(x-1).
\end{aligned}
$$

Genau wie im § 2 nehme ich nun einen Punkt α an, an d die beiden Losungen zusammenstoßen sollen Soll in dies Punkte y stetig sein, so kann man, wie im § 1, k_1 und k_2 dur eine Konstante k ersetzen

$$(7)\begin{cases} \text{a)}\ y_1 = k\,\mathfrak{Sin}\,\omega(\alpha-1)\,\mathfrak{Sin}\,\omega x, & y_2 = k\,\mathfrak{Sin}\,\omega\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\omega(x- \\ \text{b)}\ y_1 = k\,\mathfrak{Cos}\,\omega(\alpha-1)\,\mathfrak{Sin}\,\omega x, & y_2 = k\,\mathfrak{Sin}\,\omega\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\omega(x- \\ \text{c)}\ y_1 = k\,\mathfrak{Sin}\,\omega(\alpha-1)\,\mathfrak{Cos}\,\omega x, & y_2 = k\,\mathfrak{Cos}\,\omega\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\omega(x- \\ \text{d)}\ y_1 = k\,\mathfrak{Cos}\,\omega(\alpha-1)\,\mathfrak{Cos}\,\omega x, & y_2 = k\,\mathfrak{Cos}\,\omega\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\omega(x- \end{cases}$$

Soll schließlich der Sprung, den y' an der Stelle α mac gerade 1 sein, so ergeben sich als endgultige Losungen.

$$(8)\begin{cases} \text{a)}\quad y_1 = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\omega(1-\alpha)\,\mathfrak{Sin}\,\omega x}{\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega}, & y_2 = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\omega\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\omega(1-x}{\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega} \\ \text{b)}\quad y_1 = \dfrac{\mathfrak{Cos}\,\omega(1-\alpha)\,\mathfrak{Sin}\,\omega\alpha}{\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega}, & y_2 = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\omega\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\omega(1-x}{\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega} \\ \text{c)}\quad y_1 = \dfrac{\mathfrak{Sin}\,\omega(1-\alpha)\,\mathfrak{Cos}\,\omega x}{\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega}, & y_2 = \dfrac{\mathfrak{Cos}\,\omega\alpha\,\mathfrak{Sin}\,\omega(1-x}{\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega} \\ \text{d)}\quad y_1 = \dfrac{\mathfrak{Cos}\,\omega(1-\alpha)\,\mathfrak{Cos}\,\omega x}{-\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega}, & y_2 = \dfrac{\mathfrak{Cos}\,\omega\alpha\,\mathfrak{Cos}\,\omega(1-x}{-\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega} \end{cases}$$

Haben wir wieder statt der Bedingungen (2) die allgemei Bedingung

$$(9)\qquad p_0 y(0) + q_0 y'(0) = 0, \qquad p_1 y(1) + q_1 y'(1) = 0,$$

so sind die Falle a), b), c), d) in folgender Weise zu unterscheide

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \left|\dfrac{q_0\omega}{p_0}\right| < 1, & \left|\dfrac{q_1\omega}{p_1}\right| < 1, \\ \text{b)} & \left|\dfrac{q_0\omega}{p_0}\right| < 1, & \left|\dfrac{q_1\omega}{p_1}\right| > 1, \\ \text{c)} & \left|\dfrac{q_0\omega}{p_0}\right| > 1, & \left|\dfrac{q_1\omega}{p_1}\right| < 1, \\ \text{d)} & \left|\dfrac{q_0\omega}{p_0}\right| > 1, & \left|\dfrac{q_1\omega}{p_1}\right| > 1. \end{array}$$

Es ergeben sich dann fur $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ statt (6) die folgende transzendenten Gleichungen

$$
(10)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
\text{a)} & \mathfrak{Tg}\,\varkappa_1 = -\dfrac{q_0\,\omega}{p_0}, & \mathfrak{Tg}\,(\varkappa_2 + \omega) = -\dfrac{q_1\,\omega}{p_1}, \\[2ex]
\text{b)} & \mathfrak{Tg}\,\varkappa_1 = -\dfrac{q_0\,\omega}{p_0}, & \mathfrak{Ctg}\,(\varkappa_2 + \omega) = -\dfrac{q_1\,\omega}{p_1}, \\[2ex]
\text{c)} & \mathfrak{Ctg}\,\varkappa_1 = -\dfrac{q_0\,\omega}{p_0}, & \mathfrak{Tg}\,(\varkappa_2 + \omega) = -\dfrac{q_1\,\omega}{p_1}, \\[2ex]
\text{d)} & \mathfrak{Ctg}\,\varkappa_1 = -\dfrac{q_0\,\omega}{p_0}, & \mathfrak{Ctg}\,(\varkappa_2 + \omega) = -\dfrac{q_1\,\omega}{p_1}.
\end{array}
\right.
$$

Von den Gl. [8 a), b), c)] kann man genau so wie im § 2 zu dem Fall $c = 0$ übergehen

§ 5. $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$.

Zu der Differentialgleichung des § 1 ist hier das Glied $b\dot{y}$ hinzugetreten, das ich mit Rücksicht auf die Anwendungen als Dämpfungsglied bezeichnen will Es ist hier am praktischsten, einen komplexen Ansatz zu machen

$$
(1) \qquad y = k\,e^{nt},
$$

wobei n und k komplexe Zahlen sein sollen. Es ist dann

$$
\dot{y} = n\,k\,e^{nt}
$$

$$
(2) \qquad \ddot{y} = n^2\,k\,e^{nt}.
$$

Dadurch geht die Differentialgleichung über in

$$
(3) \qquad a\,n^2 + b\,n + c = 0,
$$

$$
(4) \qquad n = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)
$$

Es sind nun 3 Fälle zu unterscheiden:

I $b^2 < 4ac$

n ist dann komplex Ich setze

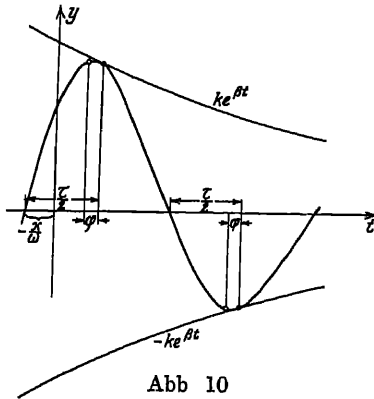
$$
n = \beta \pm i\,\omega
$$

Dann ist

$$
(4_I) \qquad \beta = -\frac{b}{2a}, \qquad \omega = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}.
$$

Es ist dann sowohl der reelle als auch der imaginare standteil von (1) ein Integral unserer Differentialgleichı

Abb 10

Der imaginäre Bestandteil (Abb 10)

(1_I) $\quad y = k e^{\beta t} \sin(\varkappa + \omega t)$,

wobei an Stelle der komple Konstanten k von (1) die bei reellen Konstanten k und $\varkappa$ treten sind (1_I) stellt eine dämpfte Schwingung dar. trachte ich y fur die Zeite

$$t + \frac{\tau}{2}, \quad t + \tau, \quad t + \frac{3\tau}{2} \ldots,$$

bei nach § 1 (10) $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ ist erhalte ich

$$y_1 = k e^{\beta t} \sin(\varkappa + \omega t),$$

$$y_2 = k e^{\beta t + \beta \frac{\tau}{2}} \sin(\varkappa + \omega t + \pi) = - e^{\beta \frac{\tau}{2}} y_1,$$

$$y_3 = k e^{\beta t + \beta \tau} \sin(\varkappa + \omega t + 2\pi) = + e^{\beta \tau} y_1,$$

$$y_4 = k e^{\beta t + \frac{3\beta\tau}{2}} \sin(\varkappa + \omega t + 3\pi) = - e^{3\beta \frac{\tau}{2}} y_1.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Es ist daher

$$(5) \qquad \frac{|y_1|}{|y_2|} = \frac{|y_2|}{|y_3|} = \frac{|y_3|}{|y_4|} = \ldots = e^{\beta \frac{\tau}{2}}$$

und

$$(6) \qquad \frac{y_1}{y_3} = \frac{y_3}{y_5} = \cdots = e^{\beta \tau}.$$

Fur das Zeitintervall $\frac{\tau}{2}$ ist also $|y_\nu|$ die mittlere Proportion zu $|y_{\nu-1}|$ und $|y_{\nu+1}|$ und fur das Zeitintervall τ ist y_ν die mittl Proportionale zu $y_{\nu-2}$ und $y_{\nu+2}$ $e^{\beta\tau}$ $\left(\text{oder auch } e^{\beta \frac{\tau}{2}}\right)$ heißt ı Dampfungsverhältnis Da nach (5) und (6)

$$\ln|y_\nu| - \ln|y_{\nu+1}| = \beta \frac{\tau}{2},$$

$$\ln y_\nu - \ln y_{\nu+2} = \beta\tau,$$

heißt $\beta\tau$ $\left(\text{oder auch } \beta \frac{\tau}{2}\right)$ das logarithmische Dekrement.

Nach (1_I) ist $y = 0$, wenn

$$t = \frac{1}{\omega}(-\varkappa + \mu\pi). \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3 \ldots) \tag{7}$$

Für die Mitten der Nullstellen, d. h. für

$$t = \frac{1}{\omega}\left(-\varkappa + \mu\pi + \frac{\pi}{2}\right) \tag{8}$$

ist

$$y = +k e^{\beta t} \quad \text{wenn} \quad \mu = 0, 2, 4 \ldots$$
$$y = -k e^{\beta t} \quad \text{wenn} \quad \mu = 1, 3, 5 \ldots$$

Die Kurve y berührt also an diesen Stellen die beiden Exponentiallinien $k e^{\beta t}$ und $-k e^{\beta t}$ Diese Berührungsstellen sind aber nicht die extremen Werte der Funktion. Um diese aufzusuchen, bilde ich aus (1_I)

$$\dot{y} = k e^{\beta t}[\omega \cos(\varkappa + \omega t) + \beta \sin(\varkappa + \omega t)]. \tag{2_I}$$

Es ist also $\dot{y} = 0$, wenn

$$\operatorname{tg}(\varkappa + \omega t) = -\frac{\omega}{\beta}.$$

Setze ich nun
$$\varkappa + \omega t = \mu\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi,$$
so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta}{\omega}. \tag{9}$$

$\dot{y}$ ist also Null, wenn

$$t = \frac{1}{\omega}\left(-\varkappa + \mu\pi + \frac{\pi}{2} + \varphi\right). \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3 \quad) \tag{10}$$

Vergleiche ich (8) mit (10), so erkenne ich, daß hier die extremen Werte nicht in der Mitte der Nullstellen liegen, sondern um φ von der Mitte entfernt. Ist $b > 0$, so ist nach (4_I) β und nach (9) φ negativ. Die extremen Werte liegen also vor der Mitte

II $b^2 > 4ac$.

Es sind dann in (4) beide n reell und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$y = k_1 e^{n_1 t} + k_2 e^{n_2 t}. \tag{1_{II}}$$

Es ist also $y = 0$, wenn

$$t = \frac{\ln\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)}{n_1 - n_2}. \tag{7_{II}}$$

Aus (1_{II}) bilde ich

$$(2_{II}) \qquad \begin{aligned} \dot{y} &= n_1 k_1 e^{n_1 t} + n_2 k_2 e^{n_2 t}, \\ \ddot{y} &= n_1^2 k_1 e^{n_1 t} + n_2^2 k_2 e^{n_2 t}. \end{aligned}$$

Es ist also $\dot{y} = 0$, wenn

$$(10_{II}) \qquad t = \frac{\ln\left(-\frac{n_2 k_2}{n_1 k_1}\right)}{n_1 - n_2}$$

und $\ddot{y} = 0$, wenn

$$(11) \qquad t = \frac{\ln\left(-\frac{n_2^2 k_2}{n_1^2 k_1}\right)}{n_1 - n_2}$$

Es sind daher 4 Fälle zu unterscheiden

A n_1 und n_2 haben gleiches, k_1 und k_2 verschiedenes V
zeichen. Es sei $|k_1| > |k_2|$. Dann existiert nach (7), (10) und (

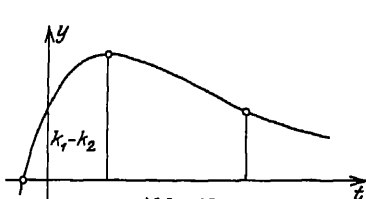



Abb. 11.

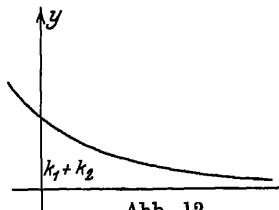



Abb. 12.

eine reelle Nullstelle, ein reelles Extremum und ein reeller Wen
punkt Wir haben noch folgende Unterfalle.

A. α) $b > 0$, $k_1 > 0$ (Abb. 11), γ) $b < 0$, $k_1 > 0$,
β) $b > 0$, $k_1 < 0$, δ) $b < 0$, $k_1 < 0$

Die Figuren fur die Falle β, γ, δ erhält man aus Abb 11 dur
Umklappen um die t-Achse, um die y-Achse resp. um beide Achs

B n_1 und n_2 sowie k_1 und k_2 haben gleiches Vorzeichen Da
existieren weder reelle Nullstellen, noch reelle Extreme, noch ree
Wendepunkte. Es sind dieselben Unterfalle zu unterscheiden v
bei *A* (Abb 12)

C. n_1 und n_2 sowie k_1 und k_2 haben verschiedenes V
zeichen (Abb. 7)

D. n_1 und n_2 haben verschiedenes, k_1 und k_2 haben gleich
Vorzeichen (Abb 8).

III. $b^2 = 4ac$.

Die Gl. (3) hat dann eine Doppelwurzel

$$(4_{III}) \qquad n = \beta = -\frac{b}{2a}$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist dann

$$(1_{III}) \qquad y = (k_1 + k_2 t)\, e^{nt}.$$

Aus dieser Gleichung folgt nämlich

$$(2_{III}) \qquad \begin{aligned} \dot{y} &= (n k_1 + n k_2 t + k_2)\, e^{nt}, \\ \ddot{y} &= (n^2 k_1 + n^2 k_2 t + 2 n k_2)\, e^{nt}. \end{aligned}$$

Setze ich diese Werte in unsere Differentialgleichung ein, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$(a n^2 + b n + c)\, k_1 + (a n^2 + b n + c)\, k_2 t + (2 a n + b)\, k_2 = 0.$$

Diese Gleichung ist für beliebige k_1 und k_2 erfüllt, wenn folgende beiden Gleichungen bestehen:

$$(3) \qquad f(n) = a n^2 + b n + c = 0,$$

$$(3') \qquad \frac{d f(n)}{d n} = 2 a n + b = 0.$$

Das ist aber gerade die Bedingung dafür, daß n eine Doppelwurzel von (3) ist. Aus (1_{III}) und (2_{III}) folgt nun:

$$(7_{III}) \qquad y = 0, \quad \text{wenn} \quad t = -\frac{k_1}{k_2},$$

$$(10_{III}) \qquad \dot{y} = 0, \quad \text{wenn} \quad t = -\frac{n k_1 + k_2}{n k_2}.$$

Nullstelle und Extremum sind also reell. Der Verlauf von y ist ähnlich wie im Falle *II A* und wir haben die entsprechenden 4 Unterfälle wie dort.

Versucht man hier eine ähnliche geometrische Deutung wie im § 1, so erhält man den Vektor

$$z = k\, e^{\beta t}\, e^{i(\varkappa + \omega t)}$$

Diese dreht sich ebenfalls mit der konstanten Geschwindigkeit ω, wird aber bei seiner Drehung vergrößert resp. verkleinert, je nachdem β positiv oder negativ ist. Sein Endpunkt beschreibt dabei eine logarithmische Spirale. Ein wesentlicher Unterschied gegen § 1

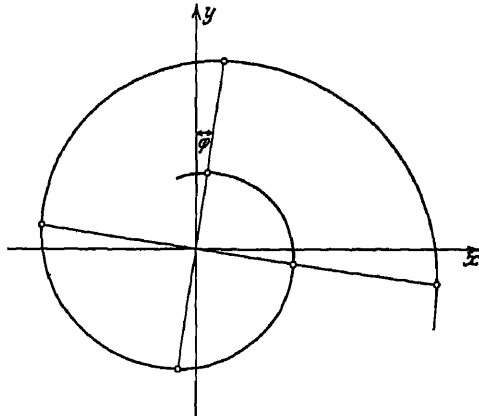



Abb. 13.

besteht z B darin, daß y nicht mehr sein Max. oder Min erre
wenn z vertikal ist, sondern um den oben berechneten Winl
früher, wenn b resp β neg ist und um φ später, wenn b re
pos. ist y wird nämlich ein Extremum, wenn $y = 0$,
wenn z horizontal ist z und $\dot{z}$ liegen aber bei der gedämp
Schwingung nicht mehr wie bei der ungedämpften um $\frac{\pi}{2}$,
dern um $\frac{\pi}{2} \pm \varphi$ auseinander (Abb. 13).

§ 6. Die Energie.

Es sei E eine Funktion von $\dot{y}$ und V eine Funktion vo
Ich entwickle beide Funktionen nach Potenzen und breche
Entwicklung nach den quadratischen Gliedern ab

$$E = E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right)_0 \dot{y} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}^2}\right)_0 \dot{y}^2, \tag{1}$$

$$V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 y^2. \tag{2}$$

Nun bilde ich die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) + \frac{dV}{dy} = 0. \tag{3}$$

Setze ich (1) und (2) ein, so wird

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}^2}\right)_0 \ddot{y} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 y = 0. \tag{4}$$

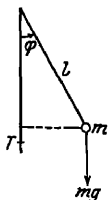



Abb 14.

Das ist eine sogenannte inhomogene Differen
gleichung, wie wir sie nachher im § 12 betrachten wer
Ist aber $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0$, so hat (4) die Form der Gleich
§ 1. Die Gl. (3) besagt dann dasselbe wie die Gleich
§ 1 (18)

I Bei mechanischen Schwingungen ist E die k
tische Energie, $\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}$ der Impuls, V das Potential, —
die Kraft und die Gl. (3) besagt, daß die Änderung des Impu
gleich der wirkenden Kraft ist. Bei dem Pendel der Abb. 14
z B die Energie

$$E = \tfrac{1}{2} m (l\dot{\varphi})^2. \tag{5}$$

Rechne ich die potentielle Energie von der tiefsten Lage T aus, so ist

$$V = mgl(1 - \cos\varphi) \tag{6}$$

Es ist daher

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}\right) = ml^2, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 = mgl \tag{9}$$

Nach § 1 (5) ist daher

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{10}$$

II. Bei elektrischen Schwingungen ist E die magnetische Energie, $\frac{\partial E}{\partial \dot{Q}} = \frac{\partial E}{\partial J} = LQ = LJ$ der Induktionsfluß (vgl. z B Orlich „Kapazitat und Induktivitat" S. 123), V die elektrische Energie und $-\frac{\partial V}{\partial Q} = -\frac{Q}{K}$ die elektromotorische Kraft Die Gleichung (3) wird

$$\frac{d}{dt}(LJ) + \frac{Q}{K} = 0 \tag{11}$$

Sie besagt, daß die Änderung des Induktionsflusses gleich der elektromotorischen Kraft ist

Ist nun außer der Kraft $-\frac{dV}{dy}$ noch eine Kraft vorhanden, die kein Potential besitzt und die proportional der Geschwindigkeit $\dot{y}$ ist, so gilt statt (3) die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}}\right) = -\frac{dV}{dy} - b\dot{y}. \tag{12}$$

Das letzte Glied stellt die Dampfung dar Als Dampfung kommt fur ein Pendel der Luftwiderstand in Betracht (Hamel El M Nr 72), fur eine Magnetnadel, die in einem geschlossenen Leiter schwingt, außerdem die Induktion (Hort: T Schw § 6)

Bei elektrischen Schwingungen tritt, wenn der Ohmsche Widerstand berucksichtigt wird, an Stelle von (11) die Gleichung

$$\frac{d}{dt}(LJ) + RJ + \frac{Q}{K} = 0 \tag{13}$$

oder

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{K}Q = 0 \tag{14}$$

oder

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{1}{K}J = 0. \tag{15}$$

§ 7. $ay'''' + cy = 0$.

Die Striche sollen Differentiationen nach x bedeuten allgemeine Integral ist

$$\begin{aligned} y = {} & K \cos\omega x \operatorname{Cof}\omega x + L \cos\omega x \operatorname{Sin}\omega x \\ & + M \sin\omega x \operatorname{Cof}\omega x + N \sin\omega x \operatorname{Sin}\omega x. \end{aligned} \tag{1}$$

Daraus folgt namlich:

$$\left\{\begin{aligned} y' = {} & \omega[(L+M)\cos\omega x \operatorname{Cof}\omega x + (K+N)\cos\omega x \operatorname{Sin}\omega \\ & + (N-K)\sin\omega x \operatorname{Cof}\omega x + (M-L)\sin\omega x \operatorname{Sin}\omega \\ y'' = {} & 2\omega^2[N\cos\omega x \operatorname{Cof}\omega x + M\cos\omega x \operatorname{Sin}\omega x \\ & - L\sin\omega x \operatorname{Cof}\omega x - K\sin\omega x \operatorname{Sin}\omega x], \\ y''' = {} & 2\omega^3[(M-L)\cos\omega x \operatorname{Cof}\omega x + (N-K)\cos\omega x \operatorname{Sin}\omega \\ & - (N+K)\sin\omega x \operatorname{Cof}\omega x - (L+M)\sin\omega x \operatorname{Sin}\omega \\ y'''' = {} & -4\omega^4 y. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Setze ich das in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$-4a\omega^4 y + cy = 0, \tag{3}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{c}{a}}. \tag{4}$$

Die K, L, M, N berechnen sich nun aus den Grenzbedingung Diese konnen z B darin bestehen, daß an den Grenzen $x =$ und $x = 1$ je 2 der Großen y, y', y'', y''' vorgeschrieben si Das gibt im ganzen 36 Moglichkeiten

Soll z B. $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$, $y''(1) = y_1''$, $y'''(1) = y_1'''$ se so ist·

$$K = y_0,$$

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{\cos^2\omega + \operatorname{Cof}^2\omega}\Big[& -(\sin\omega\cos\omega + \operatorname{Sin}\omega\operatorname{Cof}\omega)\,y_0 + \cos^2\omega \\ & + (\cos\omega\operatorname{Sin}\omega - \sin\omega\operatorname{Cof}\omega)\frac{y_1''}{2\omega^2} \\ & - \cos\omega\operatorname{Cof}\omega\frac{y_1'''}{2\omega^3}\Big], \end{aligned}$$

$$M = \frac{1}{\cos^2\omega + \mathfrak{Cos}^2\omega}\Big[+(\sin\omega\cos\omega + \mathfrak{Sin}\,\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega)\,y_0 + \mathfrak{Cos}^2\omega\,\frac{y_0'}{\omega}$$
$$+ (\sin\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega - \cos\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega)\frac{y_1''}{2\,\omega^2}$$
$$+ \cos\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega\,\frac{y_1'''}{2\,\omega^3}\Big],$$

$$N = \frac{1}{\cos^2\omega + \mathfrak{Cos}^2\omega}\Big[(\cos^2\omega - \mathfrak{Cos}^2\omega)\,y_0 + (\sin\omega\cos\omega$$
$$- \mathfrak{Sin}\,\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega)\frac{y_0'}{\omega} + 2\cos\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega\,\frac{y_1''}{2\,\omega^2}$$
$$- (\cos\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega + \sin\omega\,\mathfrak{Cos}\,\omega)\frac{y_1'''}{2\,\omega^3}\Big].$$

Die obige Differentialgleichung tritt auf

1. bei einer Eisenbahnschwelle auf nachgiebiger Unterlage (Foppl. T M III, 260);

2. wenn eine schwimmende elastische Platte durch eine Einzellast belastet wird. Sie gilt dann aber nur in großer Entfernung von dieser Einzellast (Lorenz T Ph IV, 486),

3 bei rotierenden Trommeln (Lorenz T. Ph § 62),

4 bei zylindrischen Flussigkeitsbehältern (Lorenz T Ph § 63)

§ 8. $ay'''' - cy = 0$.

Das allgemeine Integral ist

$$y = K\,\mathfrak{Cos}\,\omega x + L\cos\omega x + M\,\mathfrak{Sin}\,\omega x + N\sin\omega x \tag{1}$$

Daraus folgt

$$\begin{cases} y' = \omega\;(K\,\mathfrak{Sin}\,\omega x - L\sin\omega x + M\,\mathfrak{Cos}\,\omega x + N\cos\omega x), \\ y'' = \omega^2(K\,\mathfrak{Cos}\,\omega x - L\cos\omega x + M\,\mathfrak{Sin}\,\omega x - N\sin\omega x), \\ y''' = \omega^3(K\,\mathfrak{Sin}\,\omega n + L\sin\omega x + M\,\mathfrak{Cos}\,\omega x - N\cos\omega x), \\ y'''' = \omega^4 y. \end{cases} \tag{2}$$

Setze ich das in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$a\,\omega^4 y - c\,y = 0, \tag{3}$$

$$\omega = \sqrt[4]{\frac{c}{a}}. \tag{4}$$

Die K, L, M, N bestimmen sich aus den Grenzbedingungen Sind diese in K, L, M, N homogen, so lassen sich die Grenzbedingungen nur fur gewisse ω erfullen ω ist dann also nicht durch (4) als bestimmt gegeben anzusehen, sondern die Fragestellung lautet dann wie im § 2 I so Welchen Wert muß ω resp die Konstanten

unserer Differentialgleichung haben, damit die Grenzbedingungen erfüllbar sind?

Sollen etwa an den Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ je 2 der Größen y, y', y'', y''' verschwinden, so kombinieren sich also 2 der Gleichungen:

$$
(5)\quad \begin{cases} \text{a)} \quad y(0) = K + L = 0, \\ \text{b)} \quad y'(0) = M + N = 0, \\ \text{c)} \quad y''(0) = K - L = 0, \\ \text{d)} \quad y'''(0) = M - N = 0, \end{cases}
$$

mit 2 der Gleichungen

$$
(5)\quad \begin{cases} \text{e)} \quad y(1) = K\,\mathfrak{Cof}\,\omega + L\cos\omega + M\,\mathfrak{Sin}\,\omega + N\sin\omega = 0, \\ \text{f)} \quad y'(1) = K\,\mathfrak{Sin}\,\omega - L\sin\omega + M\,\mathfrak{Cof}\,\omega + N\cos\omega = 0, \\ \text{g)} \quad y''(1) = K\,\mathfrak{Cof}\,\omega - L\cos\omega + M\,\mathfrak{Sin}\,\omega - N\sin\omega = 0, \\ \text{h)} \quad y'''(1) = K\,\mathfrak{Sin}\,\omega + L\sin\omega + M\,\mathfrak{Cof}\,\omega - N\cos\omega = 0 \end{cases}
$$

Ich unterscheide nun 2 Fälle, je nachdem die beiden gegebenen der Gl. [5a), b), c), d)] für 2 der Größen K, L, M, N Null ergeben oder nicht.

I. Im 1 Falle ergeben sich folgende Determinanten als Bedingungsgleichungen für ω, wenn ich $\mathfrak{S}$ statt $\mathfrak{Sin}\,\omega$ usw. schreibe

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{S} & s \\ \mathfrak{C} & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tg} - \text{tg} = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{matrix} \text{a c e f,} \\ \text{b d e h.} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{S} & s \\ \mathfrak{S}, & -s \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \sin = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{matrix} \text{a c e g,} \\ \text{b d h f} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{S} & s \\ \mathfrak{C}, & -c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tg} + \text{tg} = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{matrix} \text{a c e h,} \\ \text{b d g h} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{C} & c \\ \mathfrak{S}, & -s \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tg} + \text{tg} = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{matrix} \text{a e f g,} \\ \text{b d e f} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{C} & c \\ \mathfrak{C}, & -c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \cos = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{matrix} \text{a c f h,} \\ \text{b d e g} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{S}, & -s \\ \mathfrak{C}, & -c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tg} - \text{tg} = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{matrix} \text{a c g h,} \\ \text{b d f g} \end{matrix}$$

II. Im 2. Falle ergeben sich die folgenden Determinanten

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{C} + c & \mathfrak{S} + s \\ \mathfrak{S} - s & \mathfrak{C} + c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \cos\mathfrak{Cof} + 1 = 0 \quad \text{im Falle} \quad \begin{cases} \text{a b g h,} \\ \text{c d e f,} \\ \text{a d f g,} \\ \text{b c g h} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{C} + c & \mathfrak{S} + s \\ \mathfrak{C} - c & \mathfrak{S} - s \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Tg} - \text{tg} = 0 \quad \text{im Falle.} \quad \begin{cases} \text{a b g e,} \\ \text{c d e g,} \\ \text{a d h f,} \\ \text{b c h f.} \end{cases}$$

Tabelle der Gleichungen für diejenigen ω, für die die Differentialgleichung $\frac{d^4 y}{dx^4} - \omega^4 y = 0$ lösbar ist, unter den Grenzbedingungen.

Grenzbedingungen	$y(1) = y'(1) = 0$	$y(1) = y''(1) = 0$	$y(1) = y'''(1) = 0$	$y'(1) = y''(1) = 0$	$y'(1) = y'''(1) = 0$	$y''(1) = y'''(1) = 0$
$y\ (0) = y'\ (0) = 0$	$\cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega - 1 = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\sin\omega = 0$	$\sin\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega + \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega + 1 = 0$
$y\ (0) = y''\ (0) = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\sin\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega + \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega + \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\cos\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$
$y\ (0) = y'''(0) = 0$	$\sin\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega + \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega - 1 = 0$	$\cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega + 1 = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\sin\omega = 0$
$y'\ (0) = y''\ (0) = 0$	$\sin\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega + \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega + 1 = 0$	$\cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega - 1 = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\sin\omega = 0$
$y'\ (0) = y'''(0) = 0$	$\operatorname{tg}\omega + \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\cos\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\sin\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega + \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$
$y''(0) = y'''(0) = 0$	$\cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega + 1 = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\sin\omega = 0$	$\sin\omega = 0$	$\operatorname{tg}\omega - \mathfrak{Tg}\,\omega = 0$	$\cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega - 1 = 0$

Tabelle der zu den gefundenen ω gehörigen Integrale.

Grenzbedingungen	$y(1) = y'\ (1) = 0$ oder $y(1) = y''\ (1) = 0$ oder $y(1) = y'''(1) = 0$	$y'(1) = y\ \ (1) = 0$ oder $y'(1) = y''\ (1) = 0$ oder $y'(1) = y'''(1) = 0$	$y''(1) = y\ \ (1) = 0$ oder $y''(1) = y'\ (1) = 0$ oder $y''(1) = y'''(1) = 0$	$y'''(1) = y\ \ (1) = 0$ oder $y'''(1) = y'\ (1) = 0$ oder $y'''(1) = y''(1) = 0$
$y\ (0) = y'\ (0) = 0$	$y = C_2 S_2(x) - S_2 C_2(x)$	$y = S_1 S_2(x) + C_2 C_2(x)$	$y = C_1 S_2(x) - S_1 C_2(x)$	$y = S_2 S_2(x) - C_1 C_2(x)$
$y\ (0) = y''\ (0) = 0$	$y = \mathfrak{Sin}\,\omega \sin\omega x - \sin\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega x$	$y = \mathfrak{Cof}\,\omega \sin\omega x - \cos\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega x$	$y = \mathfrak{Sin}\,\omega \sin\omega x + \sin\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega x$	$y = \mathfrak{Cof}\,\omega \sin\omega x + \cos\omega\,\mathfrak{Sin}\,\omega x$
$y\ (0) = y'''(0) = 0$	$y = C_2 S_1(x) - S_1 C_2(x)$	$y = S_1 S_1(x) + C_1 C_2(x)$	$y = C_1 S_1(x) - S_2 C_2(x)$	$y = S_2 S_1(x) + C_2 C_2(x)$
$y'\ (0) = y''\ (0) = 0$	$y = C_1 S_2(x) - S_2 C_1(x)$	$y = S_2 S_2(x) + C_2 C_1(x)$	$y = C_2 S_2(x) - S_1 C_1(x)$	$y = S_1 S_2(x) + C_1 C_1(x)$
$y'\ (0) = y'''(0) = 0$	$y = \mathfrak{Cof}\,\omega \cos\omega x - \cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega x$	$y = \mathfrak{Sin}\,\omega \cos\omega x + \sin\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega x$	$y = \mathfrak{Cof}\,\omega \cos\omega x + \cos\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega x$	$y = \mathfrak{Sin}\,\omega \cos\omega x - \sin\omega\,\mathfrak{Cof}\,\omega x$
$y''(0) = y'''(0) = 0$	$y = C_1 S_1(x) - S_1 C_1(x)$	$y = S_2 S_1(x) + C_1 C_1(x)$	$y = C_2 S_1(x) - S_2 C_1(x)$	$y = S_1 S_1(x) + C_2 C_1(x)$

Es bedeutet dabei

$$S_1(x) = \sin\omega x + \mathfrak{Sin}\,\omega x, \qquad S_1 = \sin\omega + \mathfrak{Sin}\,\omega,$$
$$S_2(x) = \sin\omega x - \mathfrak{Sin}\,\omega x, \qquad S_2 = \sin\omega - \mathfrak{Sin}\,\omega,$$
$$C_1(x) = \cos\omega x + \mathfrak{Cof}\,\omega x, \qquad C_1 = \cos\omega + \mathfrak{Cof}\,\omega,$$
$$C_2(x) = \cos\omega x - \mathfrak{Cof}\,\omega x, \qquad C_2 = \cos\omega - \mathfrak{Cof}\,\omega.$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{C}+\mathrm{c} & \mathfrak{S}+\mathrm{s} \\ \mathfrak{S}+\mathrm{s} & \mathfrak{C}-\mathrm{c} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \qquad \sin = 0 \quad \text{im Falle:} \begin{cases} \mathrm{a\,b\,g\,f}, \\ \mathrm{c\,d\,e\,h}, \\ \mathrm{a\,d\,h\,g}, \\ \mathrm{b\,c\,f\,e}. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{S}-\mathrm{s} & \mathfrak{C}+\mathrm{c} \\ \mathfrak{C}-\mathrm{c} & \mathfrak{S}-\mathrm{s} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \qquad \sin = 0 \quad \text{im Falle:} \begin{cases} \mathrm{a\,b\,h\,e}, \\ \mathrm{c\,d\,f\,g}, \\ \mathrm{a\,d\,e\,f}, \\ \mathrm{b\,c\,g\,h} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{S}-\mathrm{s} & \mathfrak{C}+\mathrm{c} \\ \mathfrak{S}+\mathrm{s} & \mathfrak{C}-\mathrm{c} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \qquad \mathfrak{Tg} + \mathrm{tg} = 0 \quad \text{im Falle:} \begin{cases} \mathrm{a\,b\,h\,f}, \\ \mathrm{c\,d\,f\,h}, \\ \mathrm{a\,d\,e\,g}, \\ \mathrm{b\,c\,g\,e}. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{C}-\mathrm{c} & \mathfrak{S}-\mathrm{s} \\ \mathfrak{S}+\mathrm{s} & \mathfrak{C}-\mathrm{c} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - \cos\mathfrak{Cof} = 0 \quad \text{im Falle} \begin{cases} \mathrm{a\,b\,e\,f}, \\ \mathrm{c\,d\,g\,h}, \\ \mathrm{a\,d\,e\,h}, \\ \mathrm{b\,c\,f\,g}. \end{cases}$$

Die Resultate sind in der Tabelle zusammengestellt Werden nun die ω den Gleichungen entsprechend gewahlt, so konnen die K, L, M, N aus den 2 gegebenen der Gl. [5a), b), c), d)] und aus einer von den 2 gegebenen der Gl [5e), f), g), h)] bis auf einen konstanten Faktor berechnet werden. Die Resultate sind ebenfalls in der Tabelle zusammengestellt.

Unsere Differentialgleichung tritt z B auf bei den Biegungsschwingungen von Staben. Vgl V § 3 (I) Es ergibt sich da zunächst eine partielle Differentialgleichung, die aber auf unsere zurückgefuhrt wird Die Grenzbedingungen haben dabei folgende Bedeutung:

1. Freies Stabende . $\quad y'' = 0,\quad y''' = 0$
2. Eingeklemmtes Stabende . $\quad y = 0,\quad y' = 0.$
3. Drehbar gelagertes Stabende $\quad y = 0,\quad y'' = 0$

§ 9. $ay'''' + by'' + cy = 0$.

Diese Gleichung hat Ähnlichkeit mit der des § 5. Die Gleichungen von § 7 und 8 sind in ihr als Spezialfalle enthalten. Es ist

$$y = k e^{nx}, \tag{1}$$

$$\begin{cases} y'' = n^2 k e^{nx}, \\ y'''' = n^4 k e^{nx}, \end{cases} \tag{2}$$

$$a n^4 + b n^2 + c = 0, \tag{3}$$

$$n^2 = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \tag{4}$$

Wie im § 5 sind nun wieder 3 Falle zu unterscheiden·

I. $b^2 < 4ac$.

n^2 ist dann komplex Ich setze:

$$n = \pm \omega_1 \pm i\omega_2.$$

Dann ist:

$$(5) \qquad \begin{cases} \omega_1^2 - \omega_2^2 = -\dfrac{b}{2a}, \\ 2\omega_1\omega_2 = \dfrac{1}{2a}\sqrt{4ac - b^2}. \end{cases}$$

Das Integral kann ich dann in folgender Form schreiben

$$(1_I) \qquad \begin{aligned} y = {} & K\,\mathfrak{Cof}\,\omega_1 x \cos\omega_2 x + L\,\mathfrak{Sin}\,\omega_1 x \cos\omega_2 x \\ & + M\,\mathfrak{Cof}\,\omega_1 x \sin\omega_2 x + N\,\mathfrak{Sin}\,\omega_1 x \sin\omega_2 x. \end{aligned}$$

Ist $b = 0$, so ist $\omega_1 = \omega_2$ und wir haben den Fall des § 7

II. $b^2 > 4ac$.

n^2 ist dann reell. Man muß folgende Unterfalle unterscheiden

II A a und c haben ungleiches Vorzeichen: Es ist in (4) ein n^2 positiv ein n^2 negativ.

II B. a und c haben gleiches, b hat das entgegengesetzte Vorzeichen Es sind in (4) beide n^2 positiv.

II C a, b und c haben gleiches Zeichen: Es sind in (4) beide n^2 negativ.

Das allgemeine Integral lautet nun in den 3 Fallen

$$(1_{II\,A}) \qquad y = K\,\mathfrak{Cof}\,\omega_1 x + L\,\mathfrak{Sin}\,\omega_1 x + M\cos\omega_2 x + N\sin\omega_2 x,$$

$$(1_{II\,B}) \qquad y = K\,\mathfrak{Cof}\,\omega_1 x + L\,\mathfrak{Sin}\,\omega_1 x + M\,\mathfrak{Cof}\,\omega_2 x + N\,\mathfrak{Sin}\,\omega_2 x,$$

$$(1_{II\,C}) \qquad y = K\cos\omega_1 x + L\sin\omega_1 x + M\cos\omega_2 x + N\sin\omega_2 x.$$

Die weiteren Rechnungen sind ähnlich wie im vorigen Paragraph. Sind z. B die Grenzbedingungen

$$y(0) = y'(0) = 0$$
$$y(1) = y'(1) = 0,$$

so ergeben sich für ω_1 und ω_2 folgende Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{Cof}\,\omega_1 - \cos\omega_2 & \dfrac{1}{\omega_1}\mathfrak{Sin}\,\omega_1 - \dfrac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 \\ \omega_1\mathfrak{Sin}\,\omega_1 + \omega_2\sin\omega_2 & \mathfrak{Cof}\,\omega_1 - \cos\omega_2 \end{vmatrix} =$$

$$(6_A) \qquad 2\omega_1\omega_2(\mathfrak{Cof}\,\omega_1\cos\omega_2 - 1) + (\omega_1^2 - \omega_2^2)\,\mathfrak{Sin}\,\omega_1\sin\omega_2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{Cof}\,\omega_1 - \mathfrak{Cof}\,\omega_2 & \frac{1}{\omega_1}\mathfrak{Sin}\,\omega_1 - \frac{1}{\omega_2}\mathfrak{Sin}\,\omega_2 \\ \omega_1 \mathfrak{Sin}\,\omega_1 - \omega_2 \mathfrak{Sin}\,\omega_2 & \mathfrak{Cof}\,\omega_1 - \mathfrak{Cof}\,\omega_2 \end{vmatrix} =$$

$$(6_B) \qquad 2\,\omega_1 \omega_2 (\mathfrak{Cof}\,\omega_1 \mathfrak{Cof}\,\omega_2 - 1) - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\,\mathfrak{Sin}\,\omega_1 \mathfrak{Sin}\,\omega_2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \cos\omega_1 - \cos\omega_2 & \frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 - \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 \\ -\omega_1 \sin\omega_1 + \omega_2 \sin\omega_2 & \cos\omega_1 - \cos\omega_2 \end{vmatrix} =$$

$$(6_C) \qquad 2\,\omega_1 \omega_2 (1 - \cos\omega_1 \cos\omega_2) - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin\omega_1 \sin\omega_2 = 0.$$

Ist $b = 0$, so ist im Falle A: $\omega_1 = \omega_2$. Die Gleichung (6_A) geht dann in die Gleichung

$$1 - \mathfrak{Cof}\,\omega \cos\omega = 0$$

von § 8 uber

III $b^2 = 4\,a\,c$

Die Gleichung (3) hat dann die beiden Doppelwurzeln

$$(4_{III}) \qquad n = \pm \sqrt{-\frac{b}{2\,a}}.$$

Man muß folgende Unterfälle unterscheiden:

III A. a und b haben gleiches Vorzeichen

$$(1_{III\,A}) \qquad y = (K + L\,x) \cos\omega x + (M + N\,x) \sin\omega x, \quad \omega = \sqrt{\frac{b}{2\,a}}$$

III B. a und b haben ungleiches Vorzeichen

$$(1_{III\,B}) \qquad y = (K + L\,x)\,\mathfrak{Cof}\,\omega x + (M + N\,x)\,\mathfrak{Sin}\,\omega x, \quad \omega = \sqrt{-\frac{b}{2\,a}}$$

§ 10. $\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{d x^i} = 0$.

Die bisher betrachteten Gleichungen sind Spezialfalle der obigen. Es soll in ihr unter $\frac{d^0 y}{d x^0}$ die Große y selbst verstanden sein Ein Integral ist

$$(1) \qquad y = k\,e^{n x},$$

$$(2) \qquad \frac{d^i y}{d x^i} = n^i\,k\,e^{n x}$$

Setze ich das in unsere Differentialgleichung ein, so ist:

$$k\,e^{n x} \sum_{i=0}^{p} a_i n^i = 0.$$

§ 10. $\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{d x^i} = 0$.

Setze ich nun:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i n^i = f(n), \tag{3}$$

so ist also (1) ein Integral unserer Differentialgleichung, wenn n eine Lösung der Gleichung

$$f(n) = 0 \tag{4}$$

ist. Das ist eine Gleichung p^{ten} Grades, die also p-Lösungen hat. Das allgemeine Integral ist also

$$y = \sum_{\mu=1}^{p} k_\mu e^{n_\mu x} \tag{5}$$

Sind unter den Wurzeln von (4) 2 konjugiert komplex, so setze ich

$$n_\mu = \beta_\mu + i\,\omega_\mu,$$
$$k_\mu = |k_\mu|\, e^{i\varkappa_\mu}$$

und bilde den reellen oder imaginären Bestandteil der Partikularlösung $k_\mu e^{n_\mu x}$. Der imaginäre Bestandteil ist

$$|k_\mu|\, e^{\beta_\mu x} \sin(\varkappa_\mu + \omega_\mu x).$$

Diese Partikularlösung mit den beiden willkürlichen Konstanten $|k_\mu|$ und $\varkappa_\mu$ ersetzt die beiden Partikularlösungen, die zu den konjugierten komplexen n_μ gehören.

Hat (4) eine $(r+1)$-fache Wurzel, d. h. werden in (5) $(r+1)$ Größen n_μ einander gleich, so ziehen sich die zugehörigen Konstanten k_μ in eine einzige Konstante zusammen. Es gehen also r-Konstanten verloren. Um die nötige Anzahl von Konstanten zu erhalten, muß ich statt (1) folgenden allgemeineren Ansatz machen.

$$y = k x^\mu e^{n x} \tag{6}$$

Nun gilt bekanntlich die Formel

$$\frac{d^i f(x) g(x)}{d x^i} = \sum_{\varkappa=0}^{i} \binom{i}{\varkappa} \frac{d^\varkappa f(x)}{d x^\varkappa} \frac{d^{i-\varkappa} g(x)}{d x^{i-\varkappa}} \tag{7}$$

Setze ich hierin

$$f(x) = x^\mu,$$
$$g(x) = e^{n x},$$

so ist:

$$\frac{d^i y}{d x^i} = k e^{n x} \sum_{\varkappa=0}^{i} \binom{i}{\varkappa} \frac{\mu!}{(\mu-\varkappa)!} n^{i-\varkappa} x^{\mu-\varkappa}. \tag{8}$$

Setze ich diesen Ausdruck in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich, wenn ich gleich umordne

$$(9) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\mu}\left(\sum_{i=\varkappa}^{p} a_i \frac{i!}{(i-\varkappa)!} n^{i-\varkappa}\right)\binom{\mu}{\varkappa} x^{\mu-\varkappa} = 0$$

Nun ist nach (3)

$$f(n) = \sum_{i=0}^{p} a_i n^i .$$

Daraus folgt

$$(10) \qquad \frac{d^\varkappa f}{dn^\varkappa} = \sum_{i=\varkappa}^{p} a_i \frac{i!}{(i-\varkappa)!} n^{i-\varkappa} .$$

Setze ich dies in (9) ein, so ist.

$$(11) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \frac{d^\varkappa f}{dn^\varkappa}\binom{\mu}{\varkappa} x^{\mu-\varkappa} = 0 .$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $\mu = 0, 1, 2 \ldots r$, wenn:

$$(12) \qquad \frac{d^\varkappa f}{dn^\varkappa} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 0 \ \ldots r .$$

Diese Gleichung besagt, daß n eine $(r+1)$-fache Wurzel der Gleichung

$$(4) \qquad f(n) = 0$$

ist Für jede Wurzel n der Gl. (4) ergibt sich also folgende Lösung

$$e^{nx}\sum_{\mu=0}^{r} k_\mu x^\mu ,$$

wobei $r+1$ die Multiplizität der Wurzel ist. Die Lösung hat dann $r+1$ willkürliche Konstante.

§ 11. $b\dot{y} + cy = C$.

Obige Differentialgleichung ist inhomogen Bei solchen Gleichungen setzt man das Integral zusammen aus einem partikularen Integral und dem allgemeinen Integral der homogenen Gleichungen:

$$(1) \qquad b\dot{y} + cy = 0$$

Das partikulare Integral ist hier einfach die Konstante

$$(2) \qquad y = \frac{C}{c} .$$

Das allgemeine Integral der homogenen Gleichung ist:

$$y = k e^{nt} \qquad \left(n = -\frac{c}{b}\right). \tag{3}$$

Das allgemeine Integral ist also.

$$y = \frac{C}{c} + k e^{-\frac{c}{b}t}. \tag{4}$$

Soll z. B. zur Zeit $t = 0$, $y = y_0$ sein, so ist nach (4) $k = y_0 - \frac{C}{c}$ und daher.

$$y = \frac{C}{c} + \left(y_0 - \frac{C}{c}\right) e^{-\frac{c}{b}t}. \tag{5}$$

Für den Schließungsextrastrom gilt z. B. die Gleichung:

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = E,$$

und es ist: $y_0 = 0$. Daher ist nach (5)

$$J = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Für den Öffnungsextrastrom ist.

$$L\frac{dJ}{dt} + RJ = 0$$

und $y_0 = \frac{E}{R}$. Daher ist:

$$J = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

§ 12. $a\ddot{y} + cy = C$.

Das partikulare Integral ist wie im § 11 die Konstante $\frac{C}{c}$, während sich das allgemeine Integral aus § 1 ergibt Es ist also

$$y = \frac{C}{c} + k \sin(\varkappa + \omega t). \tag{1}$$

Differentialgleichungen der obigen Form erhält man, wenn man bei mechanischen Schwingungen die Reibung nicht proportional der Geschwindigkeit ansetzt, sondern konstant annimmt. Sie ist dann so anzunehmen, daß sie stets der Geschwindigkeit entgegenwirkt, also positiv, wenn $\dot{y}$ negativ, und negativ, wenn $\dot{y}$ positiv.

$$a\ddot{y} + c y = + C \text{ fur neg. } y, \tag{2}$$

$$a\ddot{y} + c y = - C \text{ für pos. } y. \tag{3}$$

Die Losungen sind dann

$$y = + \frac{C}{c} + k \sin(\varkappa + \omega t) \text{ fur neg. } \dot{y}, \tag{4}$$

$$y = - \frac{C}{c} + k \sin(\varkappa + \omega t) \text{ fur pos. } y \tag{5}$$

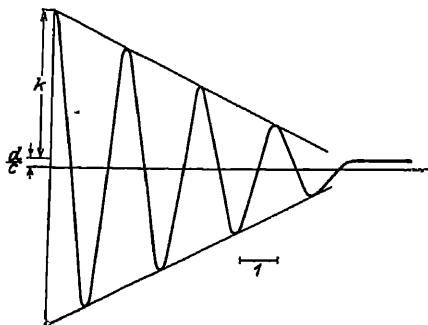



Abb. 15

Die Konstanten k sind nun so zu bestimmen, daß an den Stellen

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{2\mu + 1}{2}\pi - \varkappa\right) \tag{6}$$

$$(\mu = 0, 1, 2 \ldots),$$

wo die Lösungen (4) und (5) ineinander übergehen, dieser Übergang stetig erfolgt Es muß zu dem Zweck an den Stellen (6) k um $2\frac{C}{c}$ abnehmen, und zwar so oft, bis $k < \frac{C}{c}$. Die Schwingung bleibt dann unterwegs stehen. In der Abb 15 ist

$$\varkappa = \frac{\pi}{2}\left(\frac{C}{c} = \frac{1}{4} \text{ und } k \text{ beginnt bei } 4\right)$$

§ 13. $b\dot{y} + cy = C \sin(\gamma + \omega t)$.

In dieser Differentialgleichung ist das Glied, das die Gleichung inhomogen macht, nicht wie im vorigen Paragraph konstant, sondern eine sin-Funktion Es ist praktisch, dieses Glied in komplexer Form anzunehmen. Ich schreibe also die Differentialgleichung folgendermaßen

$$by + cy = C e^{i\gamma} e^{i\omega t}; \tag{1}$$

y setzt sich nun wieder zusammen aus einem partikularen Integral y_1 von (1) und dem allgemeinen Integral y_2 der homogenen Gleichung Es ist

$$y_1 = r e^{i\omega t}, \tag{2}$$

wobei r noch geeignet zu bestimmen ist Setze ich (2) in (1) ein, so ist:

$$(b i \omega + c) r e^{i\omega t} = C e^{i\gamma} e^{i\omega t} \tag{3}$$

oder

(4) $$r = \frac{C e^{i\gamma}}{b i \omega + c} = C e^{i\gamma} \frac{c - i b \omega}{c^2 + b^2 \omega^2},$$

r ist also komplex Ich setze·

$$r = |r| e^{i\varrho},$$

(5) $$|r| = C\sqrt{c^2 + b^2\omega^2},$$

$$\varrho = \gamma + \varphi,$$

(6) $$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{b\omega}{c}.$$

Das Integral y_1 kann ich also schreiben, wenn ich nun wieder zu reellen Großen ubergehe·

(7) $$y_1 = |r| \sin(\varrho + \omega t).$$

Hierzu tritt nun noch das Integral y_2 der homogenen Gleichung $b\dot{y} + cy = 0$ Es ist

(8) $$y_2 = k e^{nt},$$

$$bn + c = 0,$$

(9) $$n = -\frac{c}{b},$$

so daß das allgemeine Integral lautet:

(10) $$y = |r| \sin(\varrho + \omega t) + k e^{nt}.$$

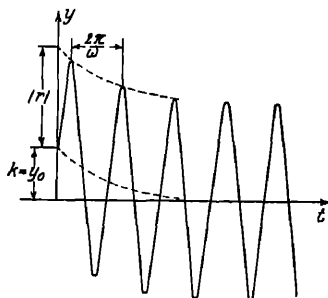
Die Integrationskonstante k sei z B dadurch bestimmt, daß fur $t = 0$ $y = y_0$ sein soll. Dann ist.

(11) $$k = y_0 - |r| \sin\varrho.$$

Abb. 16.

In Abb 16 ist speziell $\varrho = 0$ angenommen

Die Gleichung dieses Paragraphen ist die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung, $C\sin(\gamma + \omega t)$ ist die erregende Schwingung, $|r| \sin(\varrho + \omega t)$ die erzwungene Schwingung. Hat z B. eine Leitung den Widerstand R und die Selbstinduktion L und liegt an den Enden die Klemmspannung $E\sin(\gamma + \omega t)$, so gilt fur die Stromstarke J die Gleichung

(12) $$LJ + RJ = E\sin(\gamma + \omega t).$$

§ 14. $a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = C\sin(\gamma + \omega t)$.

Zu der Differentialgleichung des vorigen Paragraphen ist hier noch das Beschleunigungsglied $a\ddot{y}$ hinzugetreten. Ich gehe wieder zu komplexen Größen über

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = Ce^{i\gamma}e^{i\omega t} \tag{1}$$

Das allgemeine Integral setzt sich nun wieder zusammen aus einem partikularen Integral y_1 und dem allgemeinen Integral der homogenen Gleichung, das sich aus § 5 ergibt. Ich nehme y_1 in folgender Form an.

$$y_1 = re^{i\omega t}. \tag{2}$$

Setze ich das in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$(-a\omega^2 + bi\omega + c)re^{i\omega t} = Ce^{i\gamma}e^{i\omega t} \tag{3}$$

oder

$$Ce^{i\gamma} = (c - a\omega^2 + ib\omega)r. \tag{4}$$

Es mußte nun untersucht werden, für welchen Wert von ω bei gegebenem C die Amplitude r der erzwungenen Schwingung am größten wird. Es ist jedoch bequemer, hier den umgekehrten Weg einzuschlagen und die extremen Werte von C bei gegebenem r festzustellen. Ich bezeichne nach § 10 (3) die Klammer mit $f(i\omega)$ und differenziere das Quadrat des absoluten Betrages der Klammer nach ω. Es ist

$$|f(i\omega)|^2 = (c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2,$$

$$\frac{d}{d\omega}|f(i\omega)|^2 = -4a\omega(c - a\omega^2) + 2b^2\omega.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für:

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \frac{1}{2a}\sqrt{4ac - 2b^2}. \tag{5}$$

Ist $4ac > 2b^2$, so erhalte ich für den 1. Wert das Maximum:

$$f(i\omega_1) = c \tag{6}$$

und für den 2. Wert das Minimum

$$f(i\omega_2) = b\left(\frac{b}{2a} + i\omega_2\right). \tag{7}$$

Ist $4ac < 2b^2$, so ist nur für $\omega = 0$ ein extremer Wert vorhanden, und zwar ein Minimum. Physikalisch ist die Bedeutung

des Minimums die, daß hier die erzwungene Schwingung $re^{i\omega t}$ durch die kleinste, bei gegebenen a, b, c ausreichende erregende Schwingung $Ce^{i\omega t}$ hervorgerufen wird. Es ist also der Fall der besten Wirkung. Mit abnehmendem b kann C nach (7) sogar beliebig klein werden. Ist b sehr klein, so sind (5):

$$i\omega_2 = \frac{i}{2a}\sqrt{4ac - 2b^2}$$

und der aus § 5 (4) für die freie Schwingung geltende Wert

$$n = -\frac{b}{2a} \pm \frac{i}{2a}\sqrt{4ac - b^2}$$

nicht sehr verschieden. Die beste Wirkung liegt dann also in der Nähe der Resonanz, wenn die Periode der freien und der erzwungenen Schwingung beinahe gleich sind. Die Phasenverschiebung zwischen der erregenden Schwingung $Ce^{i\gamma}e^{i\omega t}$ und der erzwungenen Schwingung $re^{i\omega t}$ ist dann nahezu $\frac{\pi}{2}$. (Sie ist genau $\frac{\pi}{2}$, wenn $\omega = \sqrt{\frac{c}{a}}$)

Die Verhältnisse lassen sich gut in der Abb. 17 übersehen, wo die komplexen Zahlen durch Vektoren dargestellt sind. Es ist

$$AB = c,$$
$$BC = -a\omega^2,$$
$$CD = ib\omega,$$
$$AD = c - a\omega^2 + ib\omega.$$

Bei variablem ω durchläuft D eine Parabel. Den verschiedenen b entsprechen die verschiedenen Parabeln, den verschiedenen c die verschiedenen Anfangspunkte des Vektors AD. In Abb. 18 ist $a = 1$ angenommen. Für $c = 10$ sind

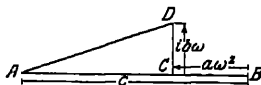
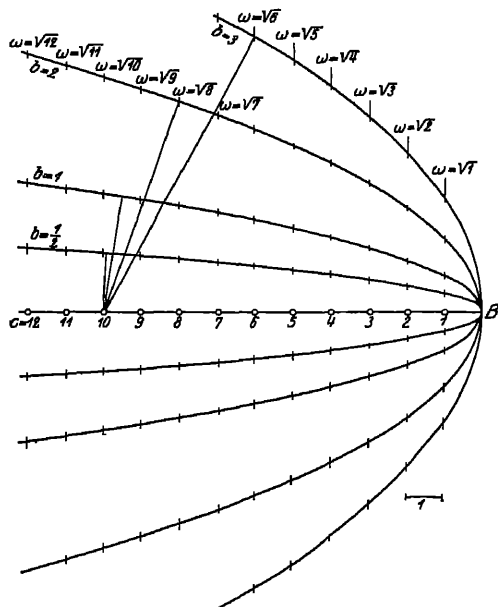



Abb. 17.

Abb. 18.

die verschiedenen Minima gezeichnet. Man sieht, daß das Minimum sich mit wachsendem b gegen $\omega = 0$ verschiebt und undeutlich wird.

Enthält z. B. eine Leitung, die an eine Klemmspannung $E \sin(\gamma + \omega t)$ angeschlossen ist, die Selbstinduktion L, den Widerstand R und die Kapazität K, so ist, wenn J die Stromstärke bedeutet,

$$(8) \qquad LJ + RJ + \frac{1}{K}\int J\,dt = E \sin(\gamma + \omega t),$$

oder, wenn ich zu komplexen Größen übergehe und differenziere,

$$(9) \qquad L\ddot{J} + RJ + \frac{1}{K} J = E i \omega e^{i\gamma} e^{i\omega t}.$$

Durch Vergleich mit (1) erhalte ich

$$a = L, \qquad C = E i \omega,$$
$$b = R, \qquad y = J,$$
$$c = \frac{1}{K}$$

Es entsteht ein sinusförmiger Wechselstrom $J \sin(\gamma + \omega t)$, und zwar ist nach (4)

$$(10) \qquad J = \frac{i E \omega}{-L\omega^2 + \frac{1}{K} + i R \omega} = \frac{E}{R + i\left(L\omega - \frac{1}{K\omega}\right)}.$$

Den Nenner der rechten Seite bezeichnet man als Widerstandsoperator. Ich setze zur Abkürzung

$$(11) \qquad S = L\omega - \frac{1}{K\omega},$$

$$(12) \qquad T = R + iS.$$

Dann ist
$$J = \frac{E}{T}.$$

Das ist eine Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes. S bezeichnet man als Querwiderstand. Er verschwindet, wenn

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LK}},$$

(10) geht dann in die gewöhnliche Form des Ohmschen Gesetzes über. Besteht die Leitung aus 2 Stücken, die hintereinander geschaltet sind, so addieren sich die Operatoren T_1 und T_2 vek-

toriell. Besteht die Leitung aus 2 Stücken, die nebeneinander geschaltet sind, so addieren sich die reziproken Widerstandsoperatoren (Leitfähigkeiten) vektoriell:

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = \frac{1}{T}.$$

Diese Addition kann man auf 2 Arten ausführen.

1. Ich bestimme zu T_1 und T_2 die reziproken komplexen Zahlen $\frac{1}{T_1}$ und $\frac{1}{T_2}$ durch Inversion am Einheitskreis. Dann addiere ich $\frac{1}{T_1}$ und $\frac{1}{T_2}$ vektoriell und bestimme zur Summe $\frac{1}{T}$ wieder die reziproke Zahl T durch Inversion.

2. Ich zeichne über einer Strecke AC 2 rechtwinklige Dreiecke ACB und ACD, deren Katheten sich wie R_1 zu S_1 resp. R_2 zu S_2 verhalten, und zwar nach unten, wenn S positiv und nach oben, wenn S negativ ist. Nun teile ich die Katheten AB und AD im Verhältnis $\frac{1}{R_1}$ resp. $\frac{1}{R_2}$. Die entstehenden Strecken AE und AF addiere ich vektoriell und bringe die Resultante AG mit dem Kreis über AC in H zum Schnitt. Dann ist $R = \frac{AH}{AG}$ und $S = \frac{HC}{AG}$. Der Beweis ergibt sich leicht aus der Abb., wenn man beachtet, daß $\frac{R_1 + i S_1}{T_1} = 1$ und $\frac{R_2 + i S_2}{T_2} = 1$. In der Abb. 19 ist speziell $R_1 = 4$, $S_1 = -6$, $R_2 = 2$, $S_2 = 4$.

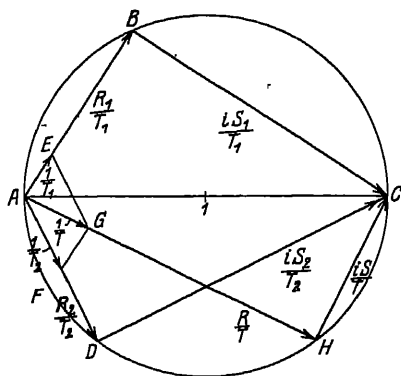



Abb. 19

§ 15. $y'' = F(x)$.

Zu dieser inhomogenen Differentialgleichung möge noch eine der folgenden 3 Grenzbedingungen treten [§ 2 (2)]

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad y(0) = 0 & y(1) = 0, \\ \text{b)} \quad y(0) = 0 & y'(1) = 0, \\ \text{c)} \quad y'(0) = 0 & y(1) = 0. \end{cases}$$

Das Integral ist offenbar:

$$y = \int dx \int F(x)\,dx + K + Lx,$$

wobei die Konstanten K und L so bestimmt werden müssen, daß die Grenzbedingungen befriedigt werden. Ich will jedoch hier einmal ganz anders verfahren, indem ich die im § 2 gegebenen unstetigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

$$(2) \qquad y'' = 0$$

benutze. Nenne ich die Lösungen $G(x, \alpha)$ (Greensche Funktion), so ist nach § 2 (12)

$$(3) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad G(x\alpha) = \begin{cases} (1-\alpha)x, & \text{wenn } x < \alpha, \\ \alpha(1-x), & \text{wenn } x > \alpha, \end{cases} \\ \text{b)} \quad G(x,\alpha) = \begin{cases} x, & \text{wenn } x < \alpha, \\ \alpha, & \text{wenn } x > \alpha, \end{cases} \\ \text{c)} \quad G(x,\alpha) = \begin{cases} 1-\alpha, & \text{wenn } x < \alpha, \\ 1-x, & \text{wenn } x > \alpha. \end{cases} \end{cases}$$

Die Funktion $G(x, \alpha)$ hat dann folgende Eigenschaften

$$(I) \qquad G''(x, \alpha) = 0,$$

$$(II) \qquad \begin{aligned} &\text{a)} \quad G(0,\alpha) = G(1,\alpha) = 0, \\ &\text{b)} \quad G(0,\alpha) = G'(1,\alpha) = 0, \\ &\text{c)} \quad G'(0,\alpha) = G(1,\alpha) = 0, \end{aligned}$$

$$(III) \qquad G'(\alpha - 0, \alpha) - G'(\alpha + 0, \alpha) = 1,$$

$$(III') \qquad G'(x, x + 0) - G'(x, x - 0) = 1.$$

Aus den Eigenschaften (I), (II), (III') folgt, daß eine Lösung unserer Differentialgleichung folgendes Integral ist

$$(4) \qquad y = -\int_0^1 G(x, \alpha) F(\alpha)\, d\alpha$$

Wegen (II) erfüllt nämlich y die Grenzbedingungen. Es muß also noch bewiesen werden, daß y auch die Differentialgleichung erfüllt. Es ist

$$(5) \qquad y' = -\int_0^1 G'(x, \alpha) F(\alpha)\, d\alpha.$$

Wenn ich nun weiter differenziere, muß ich beachten, daß $G'(x, \alpha)$ an der Stelle $x = \alpha$ unstetig ist. Es ist

$$(6) \qquad y'' = -\int_0^x G''(x, \alpha) F(\alpha)\, d\alpha - G'(x, x-0) F(x)$$
$$- \int_x^1 G''(x, \alpha) F(\alpha)\, d\alpha + G'(x, x+0) F(x)$$

oder wegen (I)

$$(7) \qquad y'' = [G'(x, x+0) - G'(x, x-0)] F(x)$$

und daher wegen (III')

$$y'' = F(x)$$

Beispiele für die Grenzbedingungen (1a)

$$F(x) = x^n \qquad y = -(1-x)\int_0^x \alpha\, \alpha^n\, d\alpha - x\int_x^1 (1-\alpha)\, \alpha^n\, d\alpha,$$
$$y = \frac{x^{n+2} - x}{(n+1)(n+2)}$$

$$F(x) = e^{nx} \qquad y = -(1-x)\int_0^x \alpha\, e^{n\alpha}\, d\alpha - x\int_x^1 (1-\alpha)\, e^{n\alpha}\, d\alpha,$$
$$y = \frac{1}{n^2}\left(e^{nx} - x e^n + x - 1\right)$$

§ 16. $y'' + \omega^2 y = F(x)$.

Zu der Differentialgleichung mögen die Grenzbedingungen § 2 (2) hinzutreten

$$(1) \qquad \begin{cases} \text{a)} \quad y(0) = 0 & y(1) = 0, \\ \text{b)} \quad y(0) = 0 & y'(1) = 0, \\ \text{c)} \quad y'(0) = 0 & y(1) = 0, \\ \text{d)} \quad y'(0) = 0 & y'(1) = 0 \end{cases}$$

Man kann wie im vorigen § die obige inhomogene Differentialgleichung lösen mit Hilfe der im § 2 gegebenen unstetigen Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$(2) \qquad y'' + \omega^2 y = 0$$

Es ist nach § 2 (10)

$$(3\text{a}) \qquad G(x, \alpha) = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega(1-\alpha)\sin\omega x}{\omega\sin\omega}, & \text{wenn} \quad x < \alpha, \\[2ex] \dfrac{\sin\omega\alpha\sin\omega(1-x)}{\omega\sin\omega}, & \text{wenn} \quad x > \alpha, \end{cases}$$

$$(3\,\mathrm{b})\qquad G(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\cos\omega(1-\alpha)\sin\omega x}{\omega\cos\omega}, & \text{wenn}\quad x<\alpha,\\[2mm] \dfrac{\sin\omega\alpha\cos\omega(1-x)}{\omega\cos\omega}, & \text{wenn}\quad x>\alpha,\end{cases}$$

$$(3\,\mathrm{c})\qquad G(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\sin\omega(1-\alpha)\cos\omega x}{\omega\cos\omega}, & \text{wenn}\quad x<\alpha,\\[2mm] \dfrac{\cos\omega\alpha\sin\omega(1-x)}{\omega\cos\omega}, & \text{wenn}\quad x>\alpha,\end{cases}$$

$$(3\,\mathrm{d})\qquad G(x,\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\cos\omega(1-\alpha)\cos\omega x}{-\omega\sin\omega}, & \text{wenn}\quad x<\alpha,\\[2mm] \dfrac{\cos\omega\alpha\cos\omega(1-x)}{-\omega\sin\omega}, & \text{wenn}\quad x>\alpha.\end{cases}$$

Die Funktion $G(x, \alpha)$ hat dann folgende Eigenschaften, die man aus den Ausdrucken (3) leicht herleiten kann

$$(I)\qquad G''(x,\alpha)+\omega^2 G(x,\alpha)=0$$

$$(II)\qquad \begin{cases}\mathrm{a)}\quad G(0,\alpha)=0 & G(1,\alpha)=0,\\ \mathrm{b)}\quad G(0,\alpha)=0 & G'(1,\alpha)=0,\\ \mathrm{c)}\quad G'(0,\alpha)=0 & G(1,\alpha)=0,\\ \mathrm{d)}\quad G'(0,\alpha)=0 & G'(1,\alpha)=0\end{cases}$$

$$(III)\qquad G'(\alpha-0,\alpha)-G'(\alpha+0,\alpha)=1$$

$$(III')\qquad G'(x,x+0)-G'(x,x-0)=1$$

Aus den Eigenschaften (*I*), (*II*), (*III'*) folgt, daß eine Losung unserer Differentialgleichung folgendes Integral ist

$$(4)\qquad y=-\int_0^1 G(x,\alpha)F(\alpha)\,d\alpha$$

Wegen (*II*) erfullt namlich y die Grenzbedingungen. Es muß also noch bewiesen werden, daß y auch die Differentialgleichung erfullt. Es ist

$$(5)\qquad y'=-\int_0^1 G'(x,\alpha)F(\alpha)\,d\alpha\,.$$

Wenn ich nun weiter differenziere, muß ich beachten, daß $G'(x, \alpha)$ an der Stelle $x = \alpha$ unstetig ist Es ist

$$y''=-\int_0^x G''(x,\alpha)F(\alpha)\,d\alpha-G'(x,x-0)F(x)$$
$$-\int_x^1 G''(x,\alpha)F(\alpha)\,d\alpha+G'(x,x+0)F(x)$$

oder wegen (*I*)

$$y'' = \int_0^1 \omega^2 G(x, \alpha) F(\alpha)\, d\alpha + [G'(x, x+0) - G'(x, x-0)] F(x).$$

Nach (4) ist daher:

$$y'' + \omega^2 y = [G'(x, x+0) - G'(x, x-0)] F(x) \tag{7}$$

und wegen (*III'*) $\qquad y'' + \omega^2 y = F(x)$.

Beispiel für die Grenzbedingung (1 a):

$$F(x) = e^{nx} \qquad y = -\frac{\sin\omega(1-x)}{\omega\sin\omega}\int_0^x e^{n\alpha}\sin\omega\alpha\, d\alpha$$

$$-\frac{\sin\omega x}{\omega\sin\omega}\int_x^1 e^{n\alpha}\sin\omega(1-\alpha)\, d\alpha$$

$$y = \frac{(x-1)\sin\omega + e^{nx}\sin\omega - e^n\sin\omega x}{(n^2+\omega^2)\sin\omega}$$

In derselben Weise läßt sich die Differentialgleichung

$$y'' - \omega^2 y = F(x)$$

behandeln mit Hilfe der im § 4 gegebenen unstetigen Lösungen.

§ 17. $\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\mu} C_\mu e^{m_\mu x}$.

Ich betrachte zunächst die folgende Differentialgleichung:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C_\mu e^{m_\mu x}. \tag{1}$$

Ein partikulares Integral ist

$$y = r_\mu e^{m_\mu x}. \tag{2}$$

Daraus folgt

$$\frac{d^i y}{dx^i} = m_\mu^i r_\mu e^{m_\mu x} \tag{3}$$

Setze ich (3) in (1) ein, so wird

$$r_\mu e^{m_\mu x} \sum_{i=0}^{p} a_i m_\mu^i = C_\mu e^{m_\mu x}. \tag{4}$$

Setze ich nun zur Abkürzung:

$$\sum_{\iota=0}^{p} a_\iota m_\mu^\iota = f_\mu\,, \tag{5}$$

so ist:

$$r_\mu f_\mu = C_\mu\,,$$

$$r_\mu = \frac{C_\mu}{f_\mu} \tag{6}$$

Das partikulare Integral der in der Überschrift stehenden Differentialgleichung ist nun einfach

$$y = \sum_\mu r_\mu e^{m_\mu x} \tag{7}$$

Ist auf der rechten Seite der Differentialgleichung ein m_μ komplex

$$m_\mu = \beta_\mu + i\,\omega_\mu\,,$$

so nehme ich auch das zugehörige C_μ komplex an. Ich kann dann das entsprechende Glied auf die folgende Form bringen

$$C_\mu e^{\beta_\mu x} \sin(\gamma_\mu + \omega_\mu x)\,.$$

Die Methode versagt, wenn m_μ eine Wurzel der Gleichung

$$\sum_{\iota=0}^{p} a_\iota n^\iota = f = 0 \tag{8}$$

ist, weil dann nach (5) $r_\mu = \infty$ wird. In diesem Falle verfährt man genau wie im § 10 für den Fall verfahren wurde, daß (8) eine $(r+1)$-fache Wurzel besaß Ich setze jetzt voraus, daß m_μ eine r-fache Wurzel von (8) ist Dann ist ein partikulares Integral

$$y = r_\mu x^r e^{m_\mu x}\,, \tag{9}$$

wenn r_μ geeignet bestimmt wird Setze ich nämlich (8) in (1) ein, so folgt genau wie im § 10

$$r_\mu e^{m_\mu x} \sum_{\varkappa=0}^{r} \left(\frac{d^\varkappa f}{d n^\varkappa}\right)_{n=m_\mu} \binom{r}{\varkappa} x^{r-\varkappa} = C_\mu e^{m_\mu x}\,. \tag{10}$$

Da nun m_μ eine r-fache Wurzel von (8) sein soll, ist

$$\left(\frac{d^\varkappa f}{d n^\varkappa}\right)_{n=m_\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \varkappa = 0 \quad (r-1)$$

Daher ist nach (10)

$$r_\mu \left(\frac{d^r f}{dn^r}\right)_{n=m_\mu} = C_\mu,$$

$$r_\mu = \frac{C_\mu}{\left(\frac{d^r f}{dn^r}\right)_{n=m_\mu}}. \tag{11}$$

Lautet z. B. die Gleichung (1) speziell folgendermaßen

$$\sum_{i=r}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C, \tag{12}$$

so hat (7) die r-fache Wurzel 0. Ebenso ist rechts $m_\mu = 0$. Es ist

$$\left(\frac{d^r f}{dn^r}\right)_{n=0} = r!\, a_r$$

Nach (9) und (11) ist daher:

$$y = \frac{C}{r!\, a_r} x^r \tag{13}$$

§ 18. $\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\gamma} C_\gamma x^\gamma$.

Ich betrachte zunachst die folgende Differentialgleichung

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C_\gamma x^\gamma. \tag{1}$$

Ein partikulares Integral ist

$$y = \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma,\nu} x^\nu, \tag{2}$$

wenn die $r_{\gamma\nu}$ geeignet bestimmt werden Aus (2) folgt

$$\frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\nu=i}^{\gamma} r_{\gamma,\nu} \nu(\nu-1)\ldots(\nu-i+1) x^{\nu-i} = \sum_{\nu=i}^{\gamma} r_{\gamma,\nu} \frac{\nu!}{(\nu-i)!} x^{\nu-i}.$$

Führe ich einen neuen Summationsbuchstaben ein $\nu' = \nu - i$, so ist, wenn ich den Strich von ν' gleich wieder unterdrucke,

$$\frac{d^i y}{dx^i} = \sum_{\nu=0}^{\gamma-i} r_{\gamma,\nu+i} \frac{(\nu+i)!}{\nu!} x^\nu. \tag{3}$$

Setze ich (3) in (1) ein, so wird

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \sum_{\nu=0}^{\gamma-i} r_{\gamma,\nu+i} \frac{(\nu+i)!}{\nu!} x^\nu = C_\gamma x^\gamma .$$

Ordne ich die Summe um, so kann ich schreiben:

$$\sum_{\nu=0}^{\gamma}\left(\sum_{i=0}^{\gamma-\nu} a_i \frac{(\nu+i)!}{\nu!} r_{\gamma,\nu+i}\right) x^\nu = C_\gamma x^\gamma, \tag{4}$$

wobei ich noch festsetzen muß, daß $a_i = 0$, wenn $i > p$ Setze ich nun noch zur Abkurzung:

$$a_i \frac{(\nu+i)!}{\nu!} = c_{\nu i}, \tag{5}$$

so folgt aus (4).

$$\sum_{i=0}^{\gamma-\nu} c_{\nu i} r_{\gamma,\nu+i} = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad \nu = 0 \quad \gamma - 1 \\ C_\gamma, & \text{wenn} \quad \nu = \gamma. \end{cases} \tag{6}$$

Das sind $\gamma + 1$ lineare Gleichungen fur die $\gamma + 1$ Unbekannten $r_{\gamma,\nu}$ des Ansatzes (2) Schreibe ich sie in extenso hin, so erhalte ich

$$(6')\begin{cases} c_{00} r_{\gamma 0} + c_{01} r_{\gamma 1} + c_{02} r_{\gamma 2} + \cdots + c_{0,\gamma-1} r_{\gamma,\gamma-1} + c_{0,\gamma} \quad r_{\gamma\gamma} = 0, \\ \qquad c_{10} r_{\gamma 1} + c_{11} r_{\gamma 2} + \ldots + c_{1,\gamma-2} r_{\gamma,\gamma-1} + c_{1,\gamma-1} r_{\gamma\gamma} = 0, \\ \qquad\qquad c_{20} r_{\gamma 2} + \cdots + c_{2,\gamma-3} r_{\gamma,\gamma-1} + c_{2,\gamma-2} r_{\gamma\gamma} = 0, \\ \qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad c_{\gamma-1,0} r_{\gamma,\gamma-1} + c_{\gamma-1,1} r_{\gamma\gamma} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{\gamma,0} \quad r_{\gamma\gamma} = C_\gamma \end{cases}$$

Ich kann sie also von der letzten beginnend leicht sukzessiv auflosen:

$$(6'')\begin{cases} r_{\gamma,\gamma} = \dfrac{C_\gamma}{c_{\gamma,0}}, \\ r_{\gamma,\gamma-1} = -\dfrac{c_{\gamma-1,1} r_{\gamma,\gamma}}{c_{\gamma-1,0}} = -\dfrac{c_{\gamma-1,1} C_\gamma}{c_{\gamma-1,0} c_{\gamma,0}}, \\ r_{\gamma,\gamma-2} = -\dfrac{c_{\gamma-2,1} r_{\gamma,\gamma-1}}{c_{\gamma-2,0}} - \dfrac{c_{\gamma-2,2} r_{\gamma\gamma}}{c_{\gamma-2,0}} = \\ \qquad + \dfrac{c_{\gamma-2,1} c_{\gamma-1,1} C_\gamma}{c_{\gamma-2,0} c_{\gamma-1,0} c_{\gamma,0}} - \dfrac{c_{\gamma-2,2} C_\gamma}{c_{\gamma-2,0} c_{\gamma 0}} \\ \qquad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Das partikulare Integral der in der Überschrift stehenden Differentialgleichung ist.

(7) $$y = \sum_\gamma \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma\nu} x^\nu,$$

wobei die einzelnen $r_{\gamma\nu}$ aus den Gl. (6″) zu berechnen sind. Haben wir statt (1) die Gleichung

(8) $$\sum_{i=r}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C_\gamma x^\gamma,$$

so ist also $a_i = 0$ für $i = 0 \ldots r-1$ und daher nach (5) auch $c_{\nu i} = 0$ für $i = 0 \ldots r-1$. In den Gleichungen (6) sind dann die $r_{\gamma,0} \ldots r_{\gamma,r-1}$ nicht enthalten. Diese Größen bleiben dann also willkürlich.

§ 19. $\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = \sum_\gamma \sum_\mu C_{\gamma\mu} x^\gamma e^{m_\mu x}$.

Die Gleichung § 14 und 15 sind Spezialfalle der obigen Differentialgleichung Ich betrachte wieder zunächst folgende Gleichung:

(1) $$\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = C_{\gamma\mu} x^\gamma e^{m_\mu x}.$$

Ein partikulares Integral ist.

(2) $$y = e^{m_\mu x} \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma,\mu,\nu} x^\nu,$$

wobei die $r_{\gamma,\mu,\nu}$ in folgender Weise zu bestimmen sind Nach der schon in § 10 benutzten Formel

$$\frac{d^i fg}{dx^i} = \sum_{\varkappa=0}^{i} \binom{i}{\varkappa} \frac{d^\varkappa f}{dx^\varkappa} \frac{dg^{i-\varkappa}}{dx^{i-\varkappa}}$$

ist, wenn ich

$$f(x) = e^{m_\mu x},$$

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma\mu\nu} x^\nu$$

setze·

$$\frac{d^\varkappa f(x)}{dx^\varkappa} = m_\mu^\varkappa e^{m_\mu x},$$

$$\frac{d^{i-\varkappa} g(x)}{d x^{i-\varkappa}} = \sum_{\nu=i-\varkappa}^{\gamma} r_{\gamma\mu\nu} \frac{\nu!}{[\nu-(i-\varkappa)]!} x^{\nu-i+\varkappa},$$

$$\frac{d^i y}{d x^i} = e^{m_\mu x} \sum_{\varkappa=0}^{i} \sum_{\nu=i-\varkappa}^{\gamma} \binom{i}{\varkappa} \frac{\nu!}{[\nu-(i-\varkappa)]!} m_\mu^\varkappa r_{\gamma\mu\nu} x^{\nu-i+\varkappa}$$

oder, wenn ich die Bezeichnung der Summationsbuchstaben andere, indem ich $\varkappa$ durch $i-\varkappa'$ und ν durch $\nu'+i-\varkappa$ ersetze und die Striche gleich wieder unterdrucke

$$\frac{d^i y}{d x^i} = e^{m_\mu x} \sum_{\varkappa=0}^{i} \sum_{\nu=0}^{\gamma-\varkappa} \binom{i}{\varkappa} \frac{(\nu+\varkappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\varkappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\varkappa} x^\nu \tag{3}$$

Setze ich das in (1) ein, so ist:

$$e^{m_\mu x} \sum_{i=0}^{p} \sum_{\varkappa=0}^{i} \sum_{\nu=0}^{\gamma-\varkappa} a_i \binom{i}{\varkappa} \frac{(\nu+\varkappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\varkappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\varkappa} x^\nu = C_{\gamma\mu} x^\gamma e^{m_\mu x}.$$

Ich ordne nun die dreifache Summe um.

$$\sum_{\nu=0}^{\gamma} \sum_{\varkappa=0}^{\gamma-\nu} \sum_{i=\varkappa}^{p} a_i \binom{i}{\varkappa} \frac{(\nu+\varkappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\varkappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\varkappa} x^\nu = C_{\gamma\mu} x^\gamma.$$

Setze ich die gleichhohen Potenzen von x einander gleich, so ist

$$\sum_{\varkappa=0}^{\gamma-\nu} \sum_{i=\varkappa}^{p} a_i \binom{i}{\varkappa} \frac{(\nu+\varkappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\varkappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\varkappa} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \nu = 0 \quad \gamma-1 \\ C_{\gamma\mu}, & \text{wenn } \nu=\gamma. \end{cases} \tag{4}$$

Ich setze zur Abkurzung:

$$\sum_{i=\varkappa}^{p} a_i \binom{i}{\varkappa} \frac{(\nu+\varkappa)!}{\nu!} m_\mu^{i-\varkappa} = c_{\nu\varkappa} \tag{5}$$

Dann ist nach (4)

$$\sum_{\varkappa=0}^{\gamma-\nu} c_{\nu\varkappa} r_{\gamma,\mu,\nu+\varkappa} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \nu = 0 \quad .\gamma-1 \\ C_{\gamma\mu}, & \text{wenn } \nu=\gamma \end{cases} \tag{6}$$

Das sind dieselben Gleichungen wie im vorigen Paragraph. Sie konnen also auch ebenso sukzessiv aufgelost werden

Das partikulare Integral der in der Überschrift stehenden Differentialgleichung ist

$$y = \sum_\gamma \sum_\mu e^{m_\mu x} \sum_{\nu=0}^{\gamma} r_{\gamma\mu\nu} x^\nu, \tag{7}$$

wobei sich die $r_{\gamma\mu\nu}$ aus (5) und (6) ergeben.

§ 20. $\sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = F(x)$.

Die Losung der homogenen Gleichung ist·

$$y = \sum_{\mu=1}^{p} k_\mu e^{n_\mu x}, \tag{1}$$

wobei die n_μ die Wurzeln der Gleichung

$$f(n) = \sum_{i=0}^{p} a_i n^i = 0 \tag{2}$$

sind. Ich versuche nun, ein Integral der inhomogenen Gleichung zu finden, indem ich in (1) die k_μ nicht als Konstanten, sondern als Funktionen von x betrachte Dann ist:

$$y' = \sum k_\mu n_\mu e^{n_\mu x} + \sum k'_\mu e^{n_\mu x}.$$

Ich setze nun.

$$\sum k'_\mu e^{n_\mu x} = 0$$

Dann ist

$$y'' = \sum k_\mu n_\mu^2 e^{n_\mu x} + \sum k'_\mu n_\mu e^{n_\mu x}.$$

Ich setze weiter.

$$\sum k'_\mu n_\mu e^{n_\mu x} = 0$$

und fahre so fort. Dadurch erhalte ich schließlich:

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \sum k_\mu n_\mu^p e^{n_\mu x} + \sum k'_\mu n_\mu^{p-1} e^{n_\mu x} \tag{3}$$

Es ist also

$$\frac{d^i y}{dx^i} = \sum k_\mu n_\mu^i e^{n_\mu x} \qquad \text{fur} \quad i = 1 \quad p-1, \tag{4}$$

$$\sum k'_\mu n_\mu^i e^{n_\mu x} = 0 \quad \text{fur} \quad i = 0 \quad .\, p-2 \tag{5}$$

Setze ich (3) und (4) in unsere Differentialgleichung ein, so ist

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \sum k_\mu n_\mu^i e^{n_\mu x} + \sum k'_\mu n_\mu^{p-1} e^{n_\mu x} = F(x).$$

Die 1 Summe kann ich aber wie folgt umformen

$$\sum k_\mu e^{n_\mu x} \sum a_i n_\mu^i.$$

Sie ist daher nach (2) Null Zur Bestimmung der k'_μ habe ich also die p-Gleichungen

$$\sum k'_\mu n_\mu^i e^{n_\mu x} = \begin{cases} 0 & \text{fur} \quad i = 0\,. \quad p-2, \\ F(x) & \text{fur} \quad i = p-1\,. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem laßt sich leicht nach den k'_μ auflosen. Es ist

(6) $$k'_\mu = \frac{F(x)\, e^{-n_\mu x}}{\prod\limits_{\nu \neq \mu} (n_\mu - n_\nu)}.$$

Daher ist nach (1)

(7) $$y = \sum_{\mu=1}^{p} \frac{e^{n_\mu x} \int F(x)\, e^{-n_\mu x}\, dx}{\prod\limits_{\nu \neq \mu} (n_\mu - n_\nu)}.$$

Damit ist die Losung der Differentialgleichung auf eine Integration zuruckgefuhrt

Die Fälle, in denen diese Integration wirklich durchfuhrbar ist, lassen sich allerdings, wie in den §§ 15—17 gezeigt, ohne den Umweg uber das Integral behandeln. Auch war dabei die Lösung der Gl. (2) nicht erforderlich.

Beispiele:

I $$F(x) = e^{mx},$$

$$\int F(x)\, e^{-n_\mu x}\, dx = \frac{1}{m - n_\mu}\, e^{(m - n_\mu)x},$$

$$e^{n_\mu x} \int F(x)\, e^{-n_\mu x}\, dx = \frac{1}{m - n_\mu}\, e^{mx},$$

$$y = e^{mx} \sum_{\mu=1}^{p} \frac{1}{(m - n_\mu) \prod (n_\mu - n_\nu)}.$$

II. Ist zweitens

$$F(x) = G(x)\, e^{mx},$$

wobei $G(x)$ eine ganze rationale Funktion vom r^{ten} Grade sein soll, so ist

$$\int G(x)\, e^{(m - n_\mu)x}\, dx = \frac{e^{(m - n_\mu)x}}{m - n_\mu} \left\{ G(x) - \frac{G'(x)}{m - n_\mu} + \frac{G''(x)}{(m - n_\mu)^2} - \dots + (-1)^r \frac{G^{(r)}(x)}{(m - n_\mu)^r} \right\},$$

$$y = e^{mx} \sum_{\mu=1}^{p} \frac{1}{(m - n_\mu) \prod (n_\mu - n_\nu)} \left\{ G(x) - \frac{G'(x)}{m - n_\mu} + \frac{G''(x)}{(m - n_\mu)^2} - \dots + (-1)^r \frac{G^{(r)}(x)}{(m - n_\mu)^r} \right\}$$

II. Kapitel. Systeme von 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen[1]).

§ 1. $a_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 = 0$, $a_2 \ddot{y}_2 + c_2 y_2 = 0$. Ungekoppelte Schwingungen.

Die Losung dieser Gleichungen ist nach I § 1 (9).

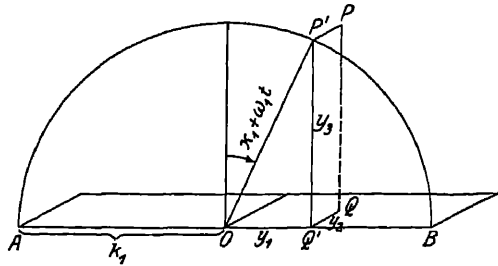
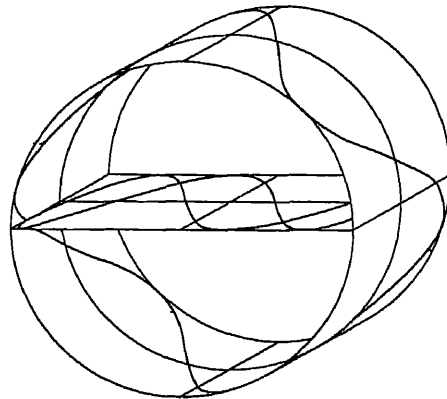
$$(1) \quad \begin{aligned} y_1 &= k_1 \sin(\varkappa_1 + \omega_1 t), \\ y_2 &= k_2 \sin(\varkappa_2 + \omega_2 t) \end{aligned}$$

Abb. 20.

Denke ich mir y_1 und y_2 als rechtwinklige Koordinaten OQ' und $Q'Q$ in einer Ebene (siehe Abb. 20), so stellen sie eine Kurve dar, deren Parametergleichung mit t als Parameter (1) ist. Es ist eine sogenannte Lissajousche Figur, wie sie beispielsweise auf dem Schirm der Braunschen Rohre erscheint Vgl Zenneck: „Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie" (Stuttgart, Ferdinand Enke). Kap II, § 3. Ich kann mir ihre Gestalt in folgender Weise veranschaulichen: Ich nehme zu (1) noch eine 3. Koordinate hinzu:

Abb 21.

$$(2) \quad y_3 = k_1 \cos(\varkappa_1 + \omega_1 t).$$

Dann bestimmen nach *I*, § 1 y_1 und y_3 einen Punkt P', der sich auf dem Kreise um O vom Radius k_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 bewegt In P' trage ich senkrecht zur Ebene des Kreises y_2 noch einmal als $P'P$ auf Der Punkt P beschreibt dann eine Sinuslinie auf dem Zylindermantel vom Durchmesser $2k_1$ Die

[1]) Vgl zu diesem Kapitel M. Wien „Über die Ruckwirkung eines resonierenden Systems" Wied Ann Bd 61, 1897

Projektion dieser Sinuslinie auf die Ebene $y_1 y_2$ gibt nun unsere Kurve (1) (siehe Abb 21, in der $\varkappa_2 - \varkappa_1 = \frac{\pi}{4}$ und $\omega_2 = 3\omega_1$ ist). Führe ich 3 Einheitsvektoren $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3$ ein und bezeichne ich den räumlichen Vektor OP mit $\bar{z}$, so ist

$$(3)\ z = k_1 \sin(\varkappa_1 + \omega_1 t)\,\bar{\varepsilon}_1 + k_2 \sin(\varkappa_2 + \omega_2 t)\,\bar{\varepsilon}_2 + k_1 \cos(\varkappa_1 + \omega_1 t)\,\bar{\varepsilon}_3 .$$

Ist speziell $\omega_1 = \omega_2$, so kann ich dafür schreiben

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \cos\omega t\,(k_1 \sin\varkappa_1 \bar{\varepsilon}_1 + k_2 \sin\varkappa_2 \bar{\varepsilon}_2 + k_1 \cos\varkappa_1 \bar{\varepsilon}_3)\\ &\quad + \sin\omega t\,(k_1 \cos\varkappa_1 \bar{\varepsilon}_1 + k_2 \cos\varkappa_2 \bar{\varepsilon}_2 - k_1 \sin\varkappa_1 \bar{\varepsilon}_3) .\end{aligned}$$

Die 1 Klammer ist der Wert von z für $t = 0$ und die 2 Klammer der Wert von $\bar{z}$ für $t = \frac{\pi}{2\omega}$ Ich kann daher schreiben

$$\bar{z} = \cos\omega t\,\bar{z}(0) + \sin\omega t\,\bar{z}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right).$$

Da wir also $\bar{z}$ durch 2 feste Vektoren ausdrücken können, muß $\bar{z}$ bei veränderlichem t eine „ebene" Kurve beschreiben, und zwar als Schnitt mit dem Kreiszylinder eine Ellipse. Die Projektion auf die Ebene $\bar{\varepsilon}_1 \bar{\varepsilon}_2$ ist wieder eine Ellipse, die auch in eine Strecke ausarten kann. Ist speziell noch $k_1 = k_2$ und $\varkappa_1 - \varkappa_2 = \frac{\pi}{2}$, so ist die Projektion ein Kreis

§ 2. $a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11} y_1 + a_{12}\ddot{y}_2 = 0,\quad a_{21}\ddot{y}_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + c_{22} y_2 = 0.$ Beschleunigungskopplung

Diese Differentialgleichungen sind die Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingungen bei Beschleunigungskopplung. a_{12} und a_{21} sind die Kopplungskoeffizienten Ich mache den Ansatz

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1 &= r_1 k \sin(\varkappa + \omega t),\\ y_2 &= r_2 k \sin(\varkappa + \omega t).\end{aligned}$$

Dadurch gehen die Differentialgleichungen über in folgende homogenen Gleichungen für r_1 und r_2:

$$(2)\qquad \begin{aligned} (-a_{11}\omega^2 + c_{11})\,r_1 - a_{12}\omega^2 r_2 &= 0,\\ -a_{21}\omega^2 r_1 + (-a_{22}\omega^2 + c_{22})\,r_2 &= 0,\end{aligned}$$

Sie sind nur lösbar, falls ihre Determinante verschwindet. Daraus folgt für ω^2 die Gleichung

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11} & -a_{12}\omega^2 \\ -a_{21}\omega^2 & -a_{22}\omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$(3a)\qquad (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,\omega^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})\,\omega^2 + c_{11}c_{22} = 0\,.$$

Ich führe folgende Abkürzungen ein

$$(4)\qquad \frac{c_{11}}{a_{11}} = \gamma_I^2, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} = \gamma_{II}^2, \quad \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} = a$$

Dann wird (3a)

$$(5)\qquad (1-a)\,\omega^4 - (\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2)\,\omega^2 + \gamma_I^2\gamma_{II}^2 = 0\,.$$

$$(6)\qquad \omega^2 = \frac{1}{2(1-a)}\cdot\left(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 \pm \sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 + 4a\gamma_I^2\gamma_{II}^2}\right).$$

Ist $0 < a < 1$, so ist ω^2 reell und positiv Aus einer der beiden Gleichungen (2) kann man dann r_1 und r_2 bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor berechnen. Aus der 1. Gleichung (2) folgt:

$$(7)\qquad \begin{aligned} r_1 &= +a_{12}\omega^2, \\ r_2 &= -a_{11}\omega^2 + c_{11}\,. \end{aligned}$$

Nach (6) gibt es nun zwei nicht nur durch das Vorzeichen verschiedene ω Ich will sie ω_I und ω_{II} nennen. Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist dann.

$$(8)\qquad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I}k_I\sin(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{1II}k_{II}\sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I}k_I\sin(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{2II}k_{II}\sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)\,. \end{aligned}$$

Ich betrachte nun noch 2 Spezialfälle·

a) Ist die Kopplung schwach (a klein), so ist in (6).

$$\sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 + 4a\gamma_I^2\gamma_{II}^2} = \gamma_I^2 - \gamma_{II}^2 + \frac{2a\gamma_I^2\gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2},$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_I &= \sqrt{\frac{1}{1-a}\left(\gamma_I^2 + \frac{a\gamma_I^2\gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}\right)} = \gamma_I + \frac{a\gamma_I\gamma_{II}^2}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)} + \frac{1}{2}a\gamma_I \\ &= \gamma_I + \frac{a\gamma_I^3}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)}, \\ \omega_{II} &= \sqrt{\frac{1}{1-a}\left(\gamma_{II}^2 - \frac{a\gamma_I^2\gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}\right)} = \gamma_{II} - \frac{a\gamma_I^2\gamma_{II}}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)} + \frac{1}{2}a\gamma_{II} \\ &= \gamma_{II} - \frac{a\gamma_{II}^3}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)}. \end{aligned}\right.$$

Wäre keine Kopplung vorhanden, so würde das 1. System mit der Frequenz γ_I, das 2 mit der Frequenz γ_{II} schwingen

Durch die Verkopplung wird also die größere Frequenz weiter vergrößert zu ω_I und die kleinere weiter verkleinert zu ω_{II}

b) Ist $\gamma_I^2 = \gamma_{II}^2 = \gamma^2$, so ist nach (6)

$$(10)\quad \begin{cases} \omega_I^2 = \gamma^2 \dfrac{1+\sqrt{a}}{1-a} = \dfrac{\gamma^2}{1-\sqrt{a}}, \\[2ex] \omega_{II}^2 = \gamma^2 \dfrac{1-\sqrt{a}}{1-a} = \dfrac{\gamma^2}{1+\sqrt{a}}. \end{cases}$$

Nach (7) ist

$$(11)\quad \begin{cases} r_{1I} = \dfrac{a_{12}\gamma^2}{1-\sqrt{a}}, & r_{1II} = \dfrac{a_{12}\gamma^2}{1+\sqrt{a}}, \\[2ex] r_{2I} = \dfrac{-a_{11}\gamma^2\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}, & r_{2II} = \dfrac{a_{11}\gamma^2\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}. \end{cases}$$

Daher ist nach (8), wenn ich den r_{1I} und r_{2I} gemeinsamen Faktor $\dfrac{\gamma^2}{1-\sqrt{a}}$ in die willkürliche Konstante k_I und den r_{1II} und r_{2II} gemeinsamen Faktor $\dfrac{\gamma^2}{1+\sqrt{a}}$ in die willkürliche Konstante k_{II} hineinnehme

$$(12)\quad \begin{cases} y_1 = a_{12} \quad [+k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)], \\ y_2 = a_{11}\sqrt{a}[-k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)] \end{cases}$$

oder mit anderer Bezeichnung der willkürlichen Konstanten

$$(13)\quad \begin{aligned} y_1 &= a_{12} \quad [+K_I \cos\omega_I t + L_I \sin\omega_I t + K_{II}\cos\omega_{II} t + L_{II}\sin\omega_{II} t], \\ y_2 &= a_{11}\sqrt{a}[-K_I \cos\omega_I t - L_I \sin\omega_I t + K_{II}\cos\omega_{II} t + L_{II}\sin\omega_{II} t] \end{aligned}$$

Die Konstanten bestimmen sich aus dem Anfangszustand folgendermaßen

$$(14)\quad \begin{cases} K_I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_{10}}{a_{12}} - \dfrac{y_{20}}{a_{11}\sqrt{a}}\right), & L_I = \dfrac{1}{2\,\omega_I}\left(\dfrac{y_{10}}{a_{12}} - \dfrac{y_{20}}{a_{11}\sqrt{a}}\right), \\[2ex] K_{II} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_{10}}{a_{12}} + \dfrac{y_{20}}{a_{11}\sqrt{a}}\right), & L_{II} = \dfrac{1}{2\,\omega_I}\left(\dfrac{y_{10}}{a_{12}} + \dfrac{y_{20}}{a_{11}\sqrt{a}}\right) \end{cases}$$

Ist speziell $y_{20} = y_{10} = y_{20} = 0$, so ist also

$$(15)\quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} y_{10} (\cos\omega_I t + \cos\omega_{II} t), \\[1ex] y_2 = \frac{1}{2} y_{10} \sqrt{\dfrac{a_{11}a_{21}}{a_{12}a_{22}}} (\cos\omega_{II} t - \cos\omega_I t) \end{cases}$$

§ 3. $a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + c_{12}y_2 = 0,\quad c_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + c_{22}y_2 = 0.$ Kraftkopplung.

Diese Differentialgleichungen sind die Differentialgleichungen der gekoppelten Schwingungen bei Kraftkopplung.

Durch den Ansatz

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1 &= r_1 k \sin(\varkappa + \omega t), \\ y_2 &= r_2 k \sin(\varkappa + \omega t) \end{aligned}$$

gehen sie über in.

$$(2)\qquad \begin{aligned} (-a_{11}\omega^2 + c_{11})r_1 + c_{12}r_2 &= 0, \\ c_{21}r_1 + (-a_{22}\omega^2 + c_{22})r_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diese homogenen Gleichungen sind nur lösbar, falls

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & -a_{22}\omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(3\,\mathrm{a})\qquad a_{11}a_{22}\omega^4 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11})\omega^2 + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = 0$$

Ich führe folgende Abkürzungen ein

$$(4)\qquad \frac{c_{11}}{a_{11}} = \gamma_I^2,\quad \frac{c_{22}}{a_{22}} = \gamma_{II}^2,\quad \frac{c_{12}c_{21}}{a_{11}a_{22}} = c.$$

Dann wird (3 a)

$$(5)\qquad \omega^4 - (\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2)\omega^2 + (\gamma_I^2\gamma_{II}^2 - c) = 0,$$

daraus folgt

$$(6)\qquad \omega^2 = \tfrac{1}{2}(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2) + 4c}$$

Ist $0 < c < \gamma_I^2\gamma_{II}^2$, so ist ω^2 reell und positiv. Aus der 1 Gl (2) folgt nun

$$(7)\qquad \begin{aligned} r_1 &= c_{12}, \\ r_2 &= a_{11}\omega^2 - c_{11} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung ist dann wieder, wie in § 2

$$(8)\qquad \begin{aligned} y_1 &= r_{1\,I}k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{1\,II}k_{II}\sin(\varkappa_{II} + \omega_{II}t), \\ y_2 &= r_{2\,I}k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{2\,II}k_{II}\sin(\varkappa_{II} + \omega_{II}t) \end{aligned}$$

Ich betrachte noch 2 Spezialfälle

a) Ist die Kopplung schwach (c klein), so ist in (6)

$$\sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 + 4c} = \gamma_I^2 - \gamma_{II}^2 + \frac{2c}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2},$$

$$(9)\quad \begin{cases} \omega_I = \sqrt{\gamma_I^2 + \dfrac{c}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}} = \gamma_I + \dfrac{c}{2\gamma_I(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)}, \\ \omega_{II} = \sqrt{\gamma_{II}^2 - \dfrac{c}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}} = \gamma_{II} - \dfrac{c}{2\gamma_{II}(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)} \end{cases}$$

Wäre keine Kopplung vorhanden, so würde das 1. System mit der Frequenz γ_I, das 2 mit der Frequenz γ_{II} schwingen Durch die Verkopplung wird also die größere Frequenz weiter vergrößert zu ω_I und die kleinere weiter verkleinert zu ω_{II}.

b) Ist speziell $\gamma_I^2 = \gamma_{II}^2 = \gamma^2$, so ist nach (6)

$$(10)\quad \begin{aligned} \omega_I^2 &= \gamma^2 + \sqrt{c}, \\ \omega_{II}^2 &= \gamma^2 - \sqrt{c}. \end{aligned}$$

Nach (7) folgt daher

$$(11)\quad \begin{cases} r_{1\,I} = r_{1\,II} = c_{12}, \\ r_{2\,I} = a_{11}(\gamma^2 + \sqrt{c}) - c_{11} = +a_{11}\sqrt{c}, \\ r_{2\,II} = a_{11}(\gamma^2 - \sqrt{c}) - c_{11} = -a_{11}\sqrt{c} \end{cases}$$

Es ist daher nach (8)

$$(12)\quad \begin{aligned} y_1 &= c_{12}[+k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + k_{II}\sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)], \\ y_2 &= a_{11}\sqrt{c}\,[-k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) - k_{II}\sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)]. \end{aligned}$$

oder mit anderer Bezeichnung der willkürlichen Konstanten

$$(13)\quad \begin{aligned} y_1 &= c_{12}\quad [+K_I\cos\omega_I t + L_I \sin\omega_I t + K_{II}\cos\omega_{II} t + L_{II}\sin\omega_{II} t], \\ y_2 &= a_{11}\sqrt{c}\,[-K_I\cos\omega_I t - L_I \sin\omega_I t + K_{II}\cos\omega_{II} t + L_{II}\sin\omega_{II} t]. \end{aligned}$$

Die Konstanten bestimmen sich aus dem Anfangszustand folgendermaßen

$$(14)\quad \begin{cases} K_I = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_{10}}{c_{12}} - \dfrac{y_{20}}{a_{11}\sqrt{c}}\right), & L_I = \dfrac{1}{2\omega_I}\left(\dfrac{\dot y_{10}}{c_{12}} - \dfrac{y_{20}}{a_{11}\sqrt{c}}\right), \\ K_{II} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_{10}}{c_{12}} + \dfrac{y_{20}}{a_{11}\sqrt{c}}\right), & L_{II} = \dfrac{1}{2\omega_I}\left(\dfrac{y_{10}}{c_{12}} + \dfrac{y_{20}}{a_{11}\sqrt{c}}\right) \end{cases}$$

Ist speziell $y_2 = \dot y_1 = \dot y_2 = 0$, so ist also.

$$(15)\quad \begin{aligned} y_1 &= \tfrac{1}{2} y_{10}(\cos\omega_I t + \cos\omega_{II} t), \\ y_2 &= \tfrac{1}{2} y_{10}\sqrt{\frac{a_{11}c_{21}}{a_{22}c_{12}}}(\cos\omega_{II} t - \cos\omega_I t). \end{aligned}$$

§ 4. $a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11}y_1 + a_{12}\ddot{y}_2 + c_{12}y_2 = 0,$
$a_{21}\ddot{y}_1 + c_{21}y_1 + a_{22}\ddot{y}_2 + c_{22}y_2 = 0.$

Diese Differentialgleichungen sind die Differentialgleichungen fur gekoppelte Schwingungen, wenn gleichzeitig Beschleunigungs- und Kraftkoppelung vorliegt Durch den Ansatz

$$y_1 = r_1 k \sin(\varkappa + \omega t), \quad y_2 = r_2 k \sin(\varkappa + \omega t) \tag{1}$$

gehen unsere Differentialgleichungen uber in·

$$\begin{aligned}(-a_{11}\omega^2 + c_{11}) r_1 + (-a_{12}\omega^2 + c_{12}) r_2 &= 0,\\ (-a_{21}\omega^2 + c_{21}) r_1 + (-a_{22}\omega^2 + c_{22}) r_2 &= 0\end{aligned} \tag{2}$$

Diese homogenen Gleichungen sind nur losbar, falls.

$$\begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11} & -a_{12}\omega^2 + c_{12} \\ -a_{21}\omega^2 + c_{21} & -a_{22}\omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Ich fuhre folgende Abkurzungen ein.

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ A_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ A_4 &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

dann ist

$$A_0\omega^4 - A_2\omega^2 + A_4 = 0. \tag{5}$$

Diese Gleichung gibt aufgelost

$$\omega^2 = \frac{1}{2A_0}\left(A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_0A_4}\right). \tag{6}$$

Aus der 1 Gleichung (2) folgt

$$r_1 = +a_{12}\omega^2 - c_{12}, \quad r_2 = -a_{11}\omega^2 + c_{11} \tag{7}$$

Es sind nun folgende Falle zu unterscheiden (vgl I § 9)

I $A_2^2 - 4A_0A_4 > 0$

IA $A_0 A_2 A_4$ haben gleiches Vorzeichen. Dann sind in (6) beide ω reell und die allgemeine Losung unserer Differentialgleichung lautet, wie im § 2 und 3,

$$(8IA)\quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{1II} k_{II} \sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{2II} k_{II} \sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t). \end{aligned}$$

IB. $A_0 A_4$ haben gleiches und A_2 hat das entgegengesetzte Zeichen Dann ist der Ansatz (1) nicht mehr brauchbar Es muß an Stelle des sin der Sin treten Die allgemeine Losung lautet·

$$(8IB)\quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I \mathfrak{Sin}(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{1II} k_{II} \mathfrak{Sin}(\varkappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I \mathfrak{Sin}(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{2II} k_{II} \mathfrak{Sin}(\varkappa_{II} + \omega_{II} t), \end{aligned}$$

oder es muß je nach den Grenzbedingungen an Stelle eines Sin oder beider Sin der Cof treten. An Stelle von (6) tritt die Gleichung

$$(6B)\qquad \omega^2 = \frac{1}{2A_0}\left(-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_0A_4}\right)$$

IC $A_0 A_4$ haben ungleiches Vorzeichen. Dann ist in (6) ein Paar ω reell, ein Paar imaginär Die allgemeine Losung lautet

$$(8IC)\quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{1II} k_{II} \mathfrak{Sin}(\varkappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + r_{2II} k_{II} \mathfrak{Sin}(\varkappa_{II} + \omega_{II} t). \end{aligned}$$

Die Bedingung $A_2^2 - 4A_0A_4 > 0$ kann man auch durch die folgende ersetzen Es muß $a_{12} = a_{21}$ und $c_{12} = c_{21}$ sein und der Ausdruck [vgl § 6 (7)]

$$2E(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

muß eine positive Form sein, d h er darf fur keinen Wert von x und y Null oder negativ werden Der Beweis ist genau so, wie er in III, § 3 fur 3 Differentialgleichungen durchgefuhrt wird Die Bedingungen, daß E eine positive Form ist, sind·

$$a_{11} > 0, \qquad a_{22} > 0,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

II $A_2^2 - 4A_0A_4 < 0$

Statt (1) mussen wir hier den folgenden Ansatz machen

$$(1II)\qquad \begin{aligned} y_1 &= r_1 k e^{nt}, \\ y_2 &= r_2 k e^{nt} \end{aligned}$$

Fur die weiteren Rechnungen vgl § 8, in dessen Differentialgleichungen die unseren als Spezialfall enthalten sind fur

$b_{11} = b_{12} = b_{21} = b_{22} = 0$ In der allgemeinen Lösung § 8 (8 A) ist daher $\beta_I = -\beta_{II}$ und $\omega_I = \omega_{II}$ zu setzen

Ich will nun die Gl (6) noch geometrisch diskutieren Ich führe folgende Abkürzungen ein (vgl (4) in § 2 und 3)

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{c_{11}}{a_{11}} = \gamma_I^2, \quad \dfrac{c_{22}}{a_{22}} = \gamma_{II}^2, \quad \dfrac{a_{12}\,a_{21}}{a_{11}\,a_{22}} = a, \quad \dfrac{c_{12}\,c_{21}}{a_{11}\,a_{22}} = c, \\ \dfrac{a_{21}\,c_{12}}{a_{11}\,a_{22}} + \dfrac{a_{12}\,c_{21}}{a_{11}\,a_{22}} = b. \end{cases}$$

Dann ist nach (6)

$$(10)\; \omega^2 = \frac{1}{2(1-a)}\left\{\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 - b \pm \sqrt{(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 - b)^2 - 4(1-a)(\gamma_I^2\gamma_{II}^2 - c)}\right\}$$

Es ist nun von besonderem Interesse, in welcher Weise ω^2 abhängt von den Frequenzen γ_I^2 und γ_{II}^2, die vor der Verkoppe-

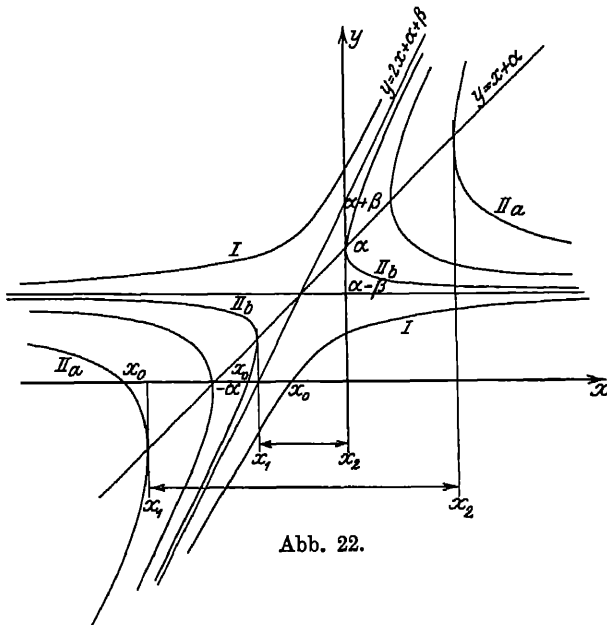



Abb. 22.

lung bestanden Da γ_I^2 und γ_{II}^2 in (10) symmetrisch vorkommen, genügt es, die eine Abhängigkeit zu betrachten Ich setze

$$(11)\quad \begin{aligned} 2(1-a)\,\omega^2 &= y, \\ \gamma_{II}^2 &= x \end{aligned}$$

Dann wird (10)

$$y = x + \alpha \pm \sqrt{x^2 + 2\beta x + \gamma}, \tag{12}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \gamma_I^2 - b, \\ \beta = 2a\gamma_I^2 - \gamma_I^2 - b, \\ \gamma = (\gamma_I^2 - b)^2 + 4(1-a)c \end{array}\right. \tag{13}$$

(12) stellt eine Hyperbel dar mit den beiden Aymptoten

$$y = 2x + \alpha + \beta,$$
$$y = \qquad \alpha - \beta$$

Zu den verschiedenen γ gehören also verschiedene Hyperbeln, die alle dieselben Asymptoten besitzen Der Schnittpunkt der Hyperbel mit der x-Achse ist

$$x_0 = \frac{\gamma - \alpha^2}{2(\alpha - \beta)}.$$

Es sind 2 Fälle zu unterscheiden

I $\gamma \geqq \beta^2$. Es gehören zu jedem x 2 reelle y. Ist $x < x_0$, so ist ein y pos und ein y neg. Ist $x > x_0$, so sind beide y pos

II $\gamma < \beta^2$ Es gibt ein Intervall x_1 bis x_2, in dem keine reellen y existieren Die Grenzen dieses Intervalles sind

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array}\right\} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma}$$

Ist $x < x_0$, so ist wie in *I* ein y pos. und ein y neg Ist $x_0 < x < x_1$, so sind a) beide y neg, wenn x_0 und $x_1 < -\alpha$ und b) beide y pos., wenn x_0 und $x_1 > -\alpha$ Ist $x > x_2$, so sind beide y pos Die Abb. 22 ist gezeichnet fur den Fall $\alpha > 0\, \beta < \alpha$ [1])

§ 5. Geometrische Deutung der Resultate.

In § 4 (8 *I A*) haben wir Schwingungen vor uns, die sich aus 2 einfachen Schwingungen zusammensetzen, also von folgender Gestalt sind

$$y = y_I + y_{II} = k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t) \tag{1}$$

Man kann sie in ähnlicher Weise geometrisch deuten wie die einfachen Sinusschwingungen in I, § 1. Ich betrachte also den Vektor (Abb. 23)

$$z = z_I + z_{II} = k_I e^{i(\varkappa_I + \omega_I t)} + k_{II} e^{i(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)} \tag{2}$$

[1]) Vergleiche die Hyperbel in der Abb. 4 der Wienschen Arbeit.

z_I ist ein Vektor, der sich um den Koordinatenanfangspunkt mit der Geschwindigkeit ω_I dreht. Der Vektor z_{II} führt nun 2 Bewegungen aus. 1. dreht er sich um seinen Anfangspunkt mit der Geschwindigkeit ω_{II} und 2. bewegt sich sein Anfangspunkt auf dem Kreise um O vom Radius k_I. Der Endpunkt von z beschreibt dabei eine Epi- oder Hypozykloide, je nachdem ω_I und ω_{II} gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. Man kann nun so fortfahren und zu den 2 Schwingungen noch mehr hinzufügen und erhält dann Zykloiden höherer Ordnung. Man sieht hier einen Zusammenhang zwischen der Darstellung periodischer Bewegungen von Himmelskörpern durch Zykloiden nach Ptolemäus und der Darstellung periodischer Funktionen durch trigonometrische Reihen nach Fourier

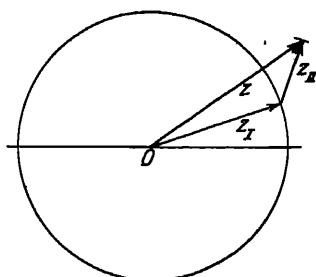
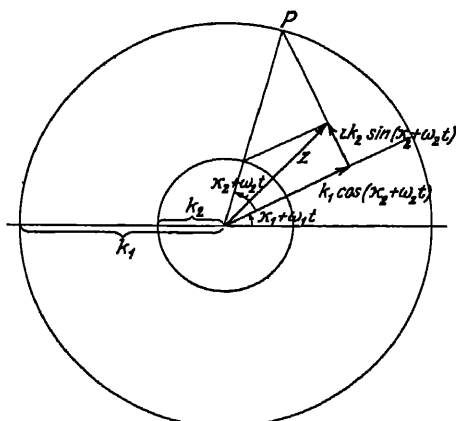



Abb 23 Abb 24.

Man kann die Gleichung (2) aber auch noch auf andere Weise interpretieren.

Ich führe neue Buchstaben ein

$$(3)\quad \begin{aligned} k_1 &= k_I + k_{II}, & \varkappa_1 &= \frac{\varkappa_I + \varkappa_{II}}{2}, & \omega_1 &= \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2}, \\ k_2 &= k_I - k_{II} & \varkappa_2 &= \frac{\varkappa_I - \varkappa_{II}}{2}, & \omega_2 &= \frac{\omega_I - \omega_{II}}{2}, \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} \varkappa_I &= \varkappa_1 + \varkappa_2, & \omega_I &= \omega_1 + \omega_2, \\ \varkappa_{II} &= \varkappa_1 - \varkappa_2, & \omega_{II} &= \omega_1 - \omega_2. \end{aligned}$$

Die Gl (2) kann ich dann schreiben

$$(5)\quad \begin{aligned} z &= [k_I e^{i(\varkappa_2+\omega_2 t)} + k_{II} e^{-i(\varkappa_2+\omega_2 t)}] e^{i(\varkappa_1+\omega_1 t)}, \\ z &= [k_1 \cos(\varkappa_2 + \omega_2 t) + i k_2 \sin(\varkappa_2 + \omega_2 t)] e^{i(\varkappa_1+\omega_1 t)} \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt eine Ellipse mit den Achsen k_1 und k_2 dar Der Endpunkt von z durchlauft die Ellipse derartig, daß der entsprechende Punkt P auf dem Kreise mit dem Radius k_1 mit der Geschwindigkeit ω_2 lauft Ist $\omega_1 = 0$, also ω_I und ω_{II} entgegengesetzt gleich, so hat die große Achse der Ellipse die feste Richtung $\varkappa_1$ Ist dagegen $\omega_1 \neq 0$, so dreht sich die Ellipse mit der Geschwindigkeit ω_1 (Abb 24)

Ist z B

$$k_I = 2k, \qquad \varkappa_I = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_I = +13\,\omega,$$

$$k_{II} = k, \qquad \varkappa_{II} = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_{II} = -11\,\omega,$$

so ist die Gl. (1)

$$y = 2k\cos 13\,\omega\,t + k\cos 11\,\omega\,t \text{ (s. Abb. 25 u. 26)}$$

Nach (3) ist

$$k_1 = 3k, \qquad \varkappa_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_1 = \omega,$$

$$k_2 = k, \qquad \varkappa_2 = 0, \qquad \omega_2 = 12\,\omega$$

Die Gl (5) wird daher

$$z = (3k\cos 12\,\omega t + i\,k\sin 12\,\omega t)\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right) + \omega t}.$$

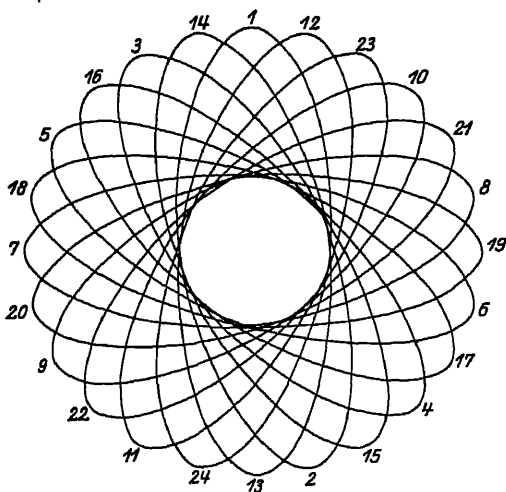



Abb. 27.

Der Endpunkt von z beschreibt dabei die Kurve Abb 27

Die Abb (26) stellt sogenannte Schwebungen dar, die um so ausgeprägter sind, je weniger k_I und k_{II} voneinander verschieden

sind. Ist $k_I = k_{II} = k$, so entartet die Ellipse von (5) zu einer Strecke und (5) geht über in:

$$z = 2\,k \cos(\varkappa_2 + \omega_2 t)\, e^{i(\varkappa_1 + \omega_1 t)} \tag{6}$$

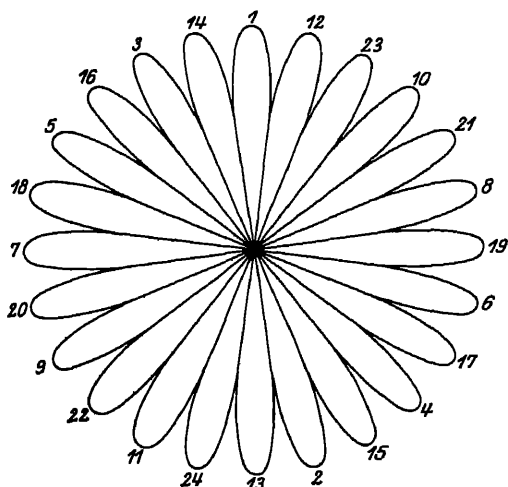



Abb. 29.

Daraus folgt eine neue Darstellung der Schwingung (1) nämlich

$$y = y_1 y_2 = 2\,k \cos(\varkappa_2 + \omega_2 t) \sin(\varkappa_1 + \omega_1 t)\,. \tag{7}$$

Im obigen Falle ist.

(1′) $\quad y = k(\cos 13\,\omega t + \cos 11\,\omega t)$ Siehe Abb 28 u. 29,

(6′) $\quad z = 2\,k \cos 12\,\omega t\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right)}$. Siehe Abb 30,

(7′) $\quad y = 2\,k \cos 12\,\omega t \cos \omega t$. Siehe Abb 29

In § 2 und 3 (15) hatten wir außer einer Schwingung der Gestalt (1′) noch eine Schwingung

(1″) $\quad y = k(-\cos 13\,\omega t + \cos 11\,\omega t)$

Es ist daher $\quad \varkappa_I = \dfrac{3\pi}{2}, \qquad \varkappa_1 = \pi,$

$\qquad\qquad \varkappa_{II} = \dfrac{\pi}{2}, \qquad \varkappa_2 = \dfrac{\pi}{2},$

(7″) $\quad y = y_1 y_2 = 2\,k \sin 12\,\omega t \sin \omega t$, siehe Abb 31

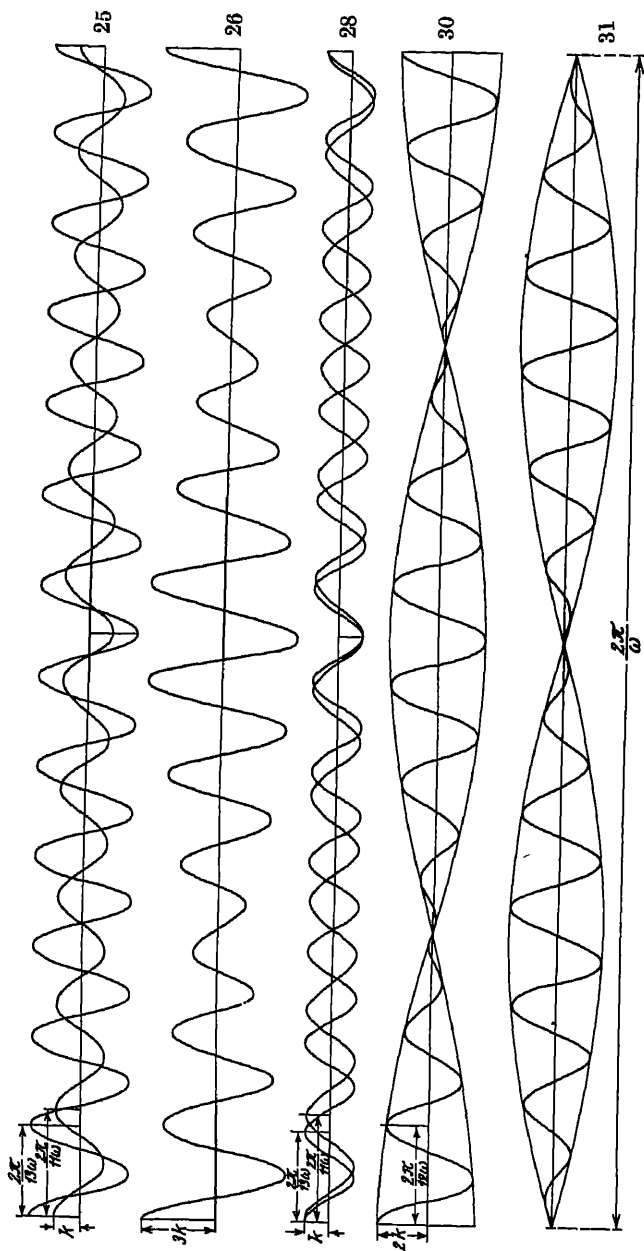



Abb 25, 26, 28, 30, 31.

Schwingungen (1') und (1'') haben nach Abb 29 und 31 die Eigentümlichkeit, daß die eine immer dort ihre größten Werte annimmt, wo die andere die kleinsten hat und umgekehrt.

Man kann also nach (1) und (7) die Summe zweier Schwingungen $y_I + y_{II}$ ersetzen durch das Produkt der Schwingungen $y_1 y_2$ Manchmal ist auch der umgekehrte Weg praktisch, das Produkt

$$y = y_1 y_2 = k_1 \sin(\varkappa_1 + \omega_1 t)\, k_2 \sin(\varkappa_2 + \omega_2 t)$$

durch eine Summe zu ersetzen. Zu diesem Zweck schreibe ich die obige Gleichung folgendermaßen:

$$y = k_1 \sin(\varkappa_1 + \omega_1 t)\, k_2 \cos\left(\varkappa_2 - \frac{\pi}{2} + \omega_2 t\right)$$

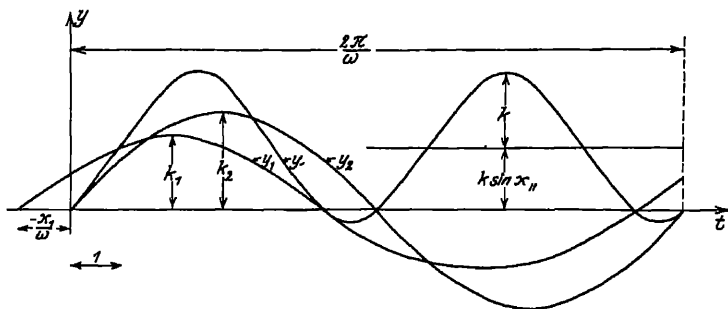



Abb 32.

Dann ist nach (4):

$$y = y_I + y_{II} = k[\sin(\varkappa_I + \omega_I t) + \sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)],$$

$$k = \frac{k_1 k_2}{2}, \qquad \varkappa_I = \varkappa_1 + \varkappa_2 - \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_I = \omega_1 + \omega_2,$$

$$\varkappa_{II} = \varkappa_1 - \varkappa_2 + \frac{\pi}{2}, \qquad \omega_{II} = \omega_1 - \omega_2.$$

Fur die Anwendungen ist besonders wichtig das Integral $\int y_1 y_2 dt$ Schreibe ich nun hierfur $\int y_I dt + \int y_{II} dt$, so erkennt man sofort, daß im allgemeinen das Integral Null sein wird. Eine Ausnahme bildet nur der Fall $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, denn dann ist

$$\omega_I = 2\omega,$$

$$\omega_{II} = 0,$$

$$\int_0^\tau y_1 y_2 dt = \int_0^\tau y_{II} dt = \int_0^\tau k \sin\varkappa_{II} dt = \frac{\tau}{2} k_1 k_2 \cos(\varkappa_1 - \varkappa_2).$$

Das Integral verschwindet also nur dann, wenn $\varkappa_1 - \varkappa_2 = 90°$.

Ist z B $\quad k_1 = \frac{3}{2}, \quad \varkappa_1 = 30°,$

$\quad k_2 = 2, \quad \varkappa_2 = 0°,$

so ist $\quad k = \frac{3}{2}, \quad \varkappa_I = -60°,$

$\quad \varkappa_{II} = 120°$ Siehe Abb 32.

Fließen z B in der Spule eines Dynamometers 2 Wechselströme

$$J_1 = |J_1| \sin(\varkappa_1 + \omega_1 t) \quad \text{und} \quad J_2 = |J_2| \sin(\varkappa_2 + \omega_2 t),$$

so ist die Ablenkung proportional

$$\int J_1 \cdot J_2 \, dt$$

Haben also diese beiden Wechselströme verschiedene Frequenz, so findet keine Ablenkung statt.

Haben sie gleiche Frequenz, so ist

$$\int_0^\tau J_1 J_2 \, dt = \frac{\tau}{2} |J_1| |J_2| \cos(\varkappa_1 - \varkappa_2)$$

§ 6. Die Lagrangeschen Gleichungen: 1. Form.

Es sei E eine Funktion von y_1, y_2 und V eine Funktion von y_1, y_2 Ich entwickle beide Funktionen nach Potenzen und breche die Entwicklung nach den quadratischen Gliedern ab

$$(1) \quad \begin{cases} E = E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_2}\right)_0 y_2 \\ \quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right)_0 y_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_1 y_2 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2}\right)_0 y_2^2\right], \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)_0 y_2 \\ \quad + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)_0 y_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_1 y_2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)_0 y_2^2\right] \end{cases}$$

Nun bilde ich die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial V}{\partial y_1} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \end{cases}$$

Es ergibt sich.

$$(4)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right)_0 \ddot{y}_1 + \left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial y_1\, \partial y_2}\right)_0 \ddot{y}_2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial y_1}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)_0 y_1 + \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_1\, \partial y_2}\right)_0 y_2 = 0, \\ \left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial y_1\, \partial y_2}\right)_0 \ddot{y}_1 + \left(\dfrac{\partial^2 E}{\partial y_2^2}\right) \ddot{y}_2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial y_2}\right)_0 + \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_1\, \partial y_2}\right)_0 y_1 + \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)_0 y_2 = 0. \end{cases}$$

Vergleiche ich diese Gleichungen mit den Differentialgleichungen § 4, so ist

$$(5)\qquad \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)_0 = 0$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 E}{\partial y_1^2} = a_{11}, \quad \dfrac{\partial^2 E}{\partial y_2^2} = a_{22}, \quad \dfrac{\partial^2 E}{\partial y_1\, \partial y_2} = a_{12} = a_{21}, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} = c_{11}, \quad \dfrac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} = c_{22}, \quad \dfrac{\partial^2 V}{\partial y_1\, \partial y_2} = c_{12} = c_{21}. \end{cases}$$

Ist also $a_{12} = a_{21}$ und $c_{12} = c_{21}$, so lassen sich die Funktionen

$$(7)\qquad \begin{aligned} E &= a_{11} y_1^2 + 2\, a_{12} y_1 y_2 + a_{22} y_2^2, \\ V &= c_{11} y_1^2 + 2\, c_{12} y_1 y_2 + c_{22} y_2^2, \end{aligned}$$

aufstellen und damit die Differentialgleichung § 4 auf die obige Form (3) bringen.

Bei mechanischen Schwingungen ist E die kinetische Energie, V das Potential und die Gl (3) sind die **Lagrange**schen Gleichungen (**Hamel** El M Nr 329).

Abb. 33.

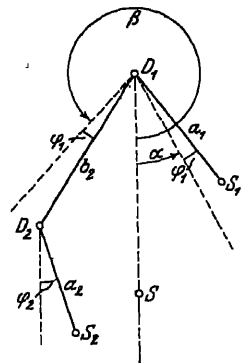
1 Es sei bei dem Doppelpendel der Abb 33 T_1 das Trägheitsmoment des 1 Gliedes um den Drehpunkt D_1 und T_2 das Trägheitsmoment des 2 Gliedes um den Drehpunkt D_2. m_1 und m_2 seien die Massen der beiden Glieder. Dann ist

$$(8)\quad 2E = (T_1 + m_2 b_2^2)\, \dot\varphi_1^2 + 2\, (a_2 b_2 m_2 \cos\beta)\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 + T_2 \dot\varphi_2^2,$$

$$(9)\quad V = -\, m_1 g\, a_1 \cos(\alpha + \varphi_1) - m_2 g\, [b_2 \cos(\beta + \varphi_1) + a_2 \cos\varphi_2].$$

Nach (1) und (2) ist daher

$$(10)\quad 2E = (T_1 + m_2 b_2^2)\, \dot\varphi_1^2 + 2\, (a_2 b_2 m_2 \cos\beta)\, \dot\varphi_1 \dot\varphi_2 + T_2 \dot\varphi_2^2,$$

$$(11)\quad \begin{aligned} V = &-(m_1 a_1 \cos\alpha + m_2 b_2 \cos\beta + m_2 a_2)\, g \\ &+ (m_1 a_1 \sin\alpha + m_2 b_2 \sin\beta)\, g\, \varphi_1 \\ &+ \tfrac{1}{2}\, [(m_1 a_1 \cos\alpha + m_2 b_2 \cos\beta)\, g\, \varphi_1^2 + m_2 a_2 g\, \varphi_2^2] \end{aligned}$$

Soll die Lage $\alpha\beta$ die Ruhelage sein, so muß der 2. Sum von V verschwinden, denn

$$x_S = \frac{m_1 a_1 \sin\alpha + m_2 b_2 \sin\beta}{m_1 + m_2}$$

ist die x-Koordinate des gemeinsamen Schwerpunktes S der Ruhelage muß aber $x_S = 0$ sein Damit sind die Gl. (fullt Rechne ich ferner die potentielle Energie nicht von durch D_1, sondern von der durch S gehenden Horizontalen so verschwindet in (11) auch das 1. Glied Dieses Glied ist die Gl (6) ja auch ohne Einfluß Ich kann daher schreiber

$$(12)\qquad 2V = (m_1 a_1 \cos\alpha + m_2 b_2 \cos\beta)\, g\, \varphi_1^2 + m_2 a_2 g\, \varphi_2^2 .$$

Liegen $D_1\, D_2\, S_1$ in einer Geraden, so ist $\alpha = \beta = 0$ die Gl. (10) und (12) werden

$$(10\text{a})\qquad 2E = (T_1 + m_2 b_2^2)\, \varphi_1^2 + 2 a_2 b_2 m_2 \varphi_1 \varphi_2 + T_2 \varphi_2^2 ,$$

$$(12\text{a})\qquad 2V = (m_1 a_1 + m_2 b_2)\, g\, \varphi_1^2 + m_2 a_2 g\, \varphi_2^2$$

Dreht sich speziell das 1 Glied um seinen Schwerpunkt (a_1 und ist $b_2 = a_2 = a$, $T_1 + m_2 b_2^2 = T_2$, so ist

$$(10\text{b})\qquad 2E = T_2 \varphi_1^2 + 2a^2 m_2 \dot\varphi_1 \varphi_2 + T_2 \varphi_2^2 ,$$

$$(12\text{b})\qquad 2V = m_2 a g\, \varphi_1^2 + m_2 a g\, \varphi_2^2 .$$

Wir haben dann den Spezialfall § 2, b) (Hamel. El. M Nr

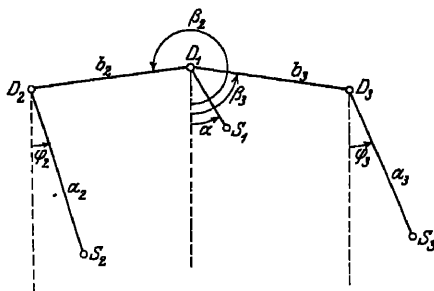



Abb. 34

2. Ich will nun noc 2 Beispiel anfuhren, we zeigen soll, daß die Verk lung zweier Schwingu auch eine derartige sein k daß die Ausdrucke (7) 1 einfache physikalische deutung haben Hängt lich an dem 1 Korper ein 3. wie etwa bei der W so ist ganz entsprechen (10) und (12) (Abb 34)

$$(13)\quad \begin{cases} 2E = (T_1 + m_2 b_2^2 + m_3 b_3^2)\, \varphi_1^2 + T_2 \varphi_2^2 + T_3 \varphi_3^2 \\ \qquad + 2\,(a_2 b_2 m_2 \cos\beta_2)\, \varphi_1 \varphi_2 + 2\,(a_3 b_3 m_3 \cos\beta_3)\, \varphi_1 \varphi_3 , \\ 2V = (m_1 a_1 \cos\alpha + m_2 b_2 \cos\beta_2 + m_3 b_3 \cos\beta_3)\, g\, \varphi_1^2 \\ \qquad + m_2 a_2 g\, \varphi_2^2 + m_3 a_3 g\, \varphi_3^2 . \end{cases}$$

Wir bekommen dann 3 Gleichungen von der Form:

$$(14)\qquad \begin{cases} a_{11}\ddot{\varphi}_1 + c_{11}\varphi_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + a_{13}\ddot{\varphi}_3 = 0\,, \\ a_{21}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + c_{22}\varphi_2 = 0\,. \\ a_{31}\ddot{\varphi}_1 + a_{33}\ddot{\varphi}_3 + c_{33}\varphi_3 = 0\,. \end{cases}$$

Hierbei ist:

$$(15)\qquad \begin{aligned} a_{11} &= T_1 + m_2 b_2^2 + m_3 b_3^2\,, & a_{12} &= a_2 b_2 m_2 \cos\beta_2\,, \\ a_{22} &= T_2\,, & a_{13} &= a_3 b_3 m_3 \cos\beta_3\,, \\ a_{33} &= T_3 \end{aligned}$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} c_{11} &= (m_1 a_1 \cos\alpha + m_2 b_2 \cos\beta_2 + m_3 b_3 \cos\beta_3)\, g\,, \\ c_{22} &= m_2 a_2 g\,, \\ c_{33} &= m_3 a_3 g\,. \end{aligned}$$

Setze ich

$$(17)\qquad m_1 a_1 \cos\alpha + m_2 b_2 \cos\beta_2 + m_3 b_3 \cos\beta_3 = y_0^\star (m_1 + m_2 + m_3)\,,$$

so ist $y_0^\star$ die Ordinate des Schwerpunktes der ganzen Kette, wenn ich mir die Gewichte $m_2 g$ und $m_3 g$ in D_2 und D_3 konzentriert denke Ist $y_0^\star = 0$ (astatisches Gleichgewicht), so ist nach (16) auch $c_{11} = 0$. Die Gleichungen (14) lauten dann

$$(18)\qquad \begin{aligned} a_{11}\varphi_1 + a_{12}\ddot{\varphi}_2 + a_{13}\ddot{\varphi}_3 &= 0\,, \\ a_{21}\ddot{\varphi}_1 + a_{22}\ddot{\varphi}_2 + c_{22}\varphi_2 &= 0\,, \\ a_{31}\ddot{\varphi}_1 + a_{33}\ddot{\varphi}_3 + c_{33}\varphi_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen kann man $\ddot{\varphi}_1$ eliminieren

$$(19)\qquad \begin{aligned} (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)\,\ddot{\varphi}_2 + a_{11} c_{22} \varphi_2 - a_{12} a_{13} \ddot{\varphi}_3 &= 0\,, \\ (a_{11} a_{33} - a_{13}^2)\,\ddot{\varphi}_3 + a_{11} c_{33} \varphi_3 - a_{12} a_{13} \ddot{\varphi}_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Das ursprungliche Problem von 3 Freiheitsgraden ist also auf 2 Freiheitsgrade zuruckgefuhrt, und zwar ist

$$(20)\qquad \begin{aligned} \hat{a}_{11} &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2\,, & \hat{c}_{11} &= a_{11} c_{22}\,, \\ \hat{a}_{22} &= a_{11} a_{33} - a_{13}^2\,, & \hat{c}_{22} &= a_{11} c_{33}\,, \\ \hat{a}_{12} &= \hat{a}_{21} = -\,a_{12} a_{13} \end{aligned}$$

Auch hier kann man, da $\hat{a}_{12} = \hat{a}_{21}$, die Ausdrucke (7) bilden, sie haben aber keine einfache physikalische Bedeutung

Ist die Gelenkkette symmetrisch, d. h. ist $a_2 = a_3$, $b_2 = b_3$, $m_2 = m_3$, $T_2 = T_3$, $\beta_2 = -\beta_3$, so ist

$$\hat{a}_{11} = \hat{a}_{22} = (T_1 + 2\, m_2 b_2^2)\, T_2 - a_2^2 b_2^2 m_2^2 \cos^2 \beta_2 ,$$
$$\hat{c}_{11} = \hat{c}_{22} = (T_1 + 2\, m_2 b_2^2)\, m_2 a_2 g ,$$
$$\hat{a}_{12} = \hat{a}_{21} = -(a_2 b_2 m_2 \cos \beta_2)^2 .$$

Wir haben dann wieder den Spezialfall § 2b

Vgl Felgentrager „Theorie, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage" (Teubner 1907), Pflieger-Haertel. „Über die kleinen Schwingungen einer dreigliedrigen ebenen Gelenkkette, zugleich ein Beitrag zur Theorie der einfachen Hebelwage" (Diss Jena 1914)

3) Gleichungen von der Form § 2 erhält man ferner, wenn ein Stab, dessen Masse vernachlassigt werden kann, von 2 Massen m_1 und m_2 belastet wird. Es ist dabei

$c_{11} = c_{22} =$ Elastizitatsmodul · Trägheitsmoment des Stabquerschnittes,

$$a_{11} = \varkappa_{11} m_1 , \quad a_{12} = \varkappa_{12} m_2 , \quad a_{21} = \varkappa_{21} m_1 , \quad a_{22} = \varkappa_{22} m_2$$

Die $\varkappa$ heißen Einflußzahlen Sie hangen von den Auflagebedingungen ab. (Lorenz, T. Ph. IV, 192.)

4) Ein Problem, bei dem Kraft- und Beschleunigungskopplung gleichzeitig vorliegen, ist der Schlingertank nach Frahm (Hort, T Schw § 121)

§ 7. $a_{11}\ddot{y}_1 + c_{11} y_1 + b_{12}\dot{y}_2 = 0,$ $b_{21}\dot{y}_1 + a_{22} y_2 + c_{22} y_2 = 0.$

Diese Differentialgleichungen sind die Gleichungen der Geschwindigkeitskopplung Es ist hier am besten, die Losung in komplexer Form anzusetzen

$$(1) \qquad \begin{aligned} y_1 &= r_1 k e^{i(\varkappa + \omega t)}, \\ y_2 &= r_2 k e^{i(\varkappa + \omega t)} \end{aligned}$$

Es ist dann sowohl der reelle Bestandteil von (1) als auch der imaginare eine Losung. Setze ich (1) in unsere Differentialgleichung ein, so ist.

$$(2) \qquad \begin{aligned} (-a_{11}\omega^2 + c_{11})\, r_1 + b_{12} i \omega r_2 &= 0 , \\ b_{21} i \omega r_1 + (-a_{22}\omega^2 + c_{22})\, r_2 &= 0 , \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} -a_{11}\omega^2 + c_{11} & b_{12} i \omega \\ b_{21} i \omega & -a_{22}\omega^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$(3\text{a}) \qquad a_{11} a_{22} \omega^4 - (a_{11} c_{22} + a_{22} c_{11} - b_{12} b_{21})\, \omega^2 + c_{11} c_{22} = 0$$

Ich führe folgende Abkürzungen ein.

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \gamma_I^2, \qquad \frac{c_{22}}{a_{22}} = \gamma_{II}^2, \qquad \frac{b_{12}\,b_{21}}{a_{11}\,a_{22}} = b. \tag{4}$$

Dann kann ich (3a) schreiben

$$\omega^4 - (\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 - b)\,\omega^2 + \gamma_I^2\gamma_{II}^2 = 0, \tag{5}$$

aufgelost.

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2 - b) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 - 2b(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2) + b^2} \tag{6}$$

Aus der 1. Gl. (2) folgt nun:

$$\begin{aligned} r_1 &= -b_{12}\,i\,\omega, \\ r_2 &= -a_{11}\,\omega^2 + c_{11}. \end{aligned} \tag{7}$$

Die allgemeine Losung unserer Differentialgleichung ist.

$$\begin{aligned} y_1 &= r_{1I}\,k_I\,e^{i(\varkappa_I + \omega_I t)} + r_{1II}\,k_{II}\,e^{i(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)}, \\ y_2 &= r_{2I}\,k_I\,e^{i(\varkappa_I + \omega_I t)} + r_{2II}\,k_{II}\,e^{i(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Ich betrachte nun 3 Spezialfalle·

a) Ist die Kopplung schwach (b klein), so ist in (6)

$$\sqrt{(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)^2 - 2b(\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2) + b^2} = \gamma_I^2 - \gamma_{II}^2 - b\,\frac{\gamma_I^2 + \gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2},$$

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_I &= \sqrt{\gamma_I^2 - b\,\frac{\gamma_I^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}} = \gamma_I - \frac{b\,\gamma_I}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)}, \\ \omega_{II} &= \sqrt{\gamma_{II}^2 + b\,\frac{\gamma_{II}^2}{\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2}} = \gamma_{II} + \frac{b\,\gamma_{II}}{2(\gamma_I^2 - \gamma_{II}^2)} \end{aligned} \right. \tag{9}$$

b) $\gamma_I^2 = \gamma_{II}^2 = \gamma^2$

$$\omega^2 = \gamma^2 - \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4b\gamma^2 + b^2} \tag{10}$$

oder bei schwacher Kopplung (b_{12} klein!)

$$\left\{ \begin{aligned} \omega^2 &= \gamma^2 \pm \gamma\sqrt{-b}, \\ \omega &= \gamma \pm \frac{1}{2}\sqrt{-b} \end{aligned} \right. \tag{10a}$$

Ist speziell $b_{12} = -b_{21}$ und ist $a_{11} = a_{22} = a$, so ist

$$\left\{ \begin{aligned} \omega^2 &= \gamma^2 \pm \gamma\,\frac{b_{21}}{a}. \\ \omega &= \gamma \pm \frac{1}{2}\,\frac{b_{21}}{a} \end{aligned} \right. \tag{10b}$$

Nach (7) ist daher in erster Annäherung:

(11)
$$r_{1I} = r_{1II} = b_{21} i \gamma,$$
$$r_{2I} = -\gamma b_{21} \qquad r_{2II} = +\gamma b_{21}.$$

Es ist daher nach (8), wenn ich den allen r gemeinsamen Faktor γb_{21} in die willkürlichen Konstanten k hineinnehme und dann zu reellen Größen übergehe

$$y_1 = k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) + k_{II} \sin(\varkappa_{II} + \omega_{II} t),$$
$$y_2 = k_I \cos(\varkappa_I + \omega_I t) - k_{II} \cos(\varkappa_{II} + \omega_{II} t)$$

c) $\gamma_{II}^2 = 0$ $(c_{22} = 0)$.

Aus (6) folgt dann
$$\omega_I^2 = \gamma_I^2 - b,$$
$$\omega_{II}^2 = 0$$

Aus (8) folgt dann, da nach (4) $-a_{11}\omega_I^2 + c_{11} = a_{11} b$ ist,

$$y_1 = b_{12}\omega_I k_I \sin(\varkappa_I + \omega_I t) = b_{12}\omega_I (K_I \cos\omega_I t + L_I \sin\omega_I t),$$
$$y_2 = a_{11} b k_I \cos(\varkappa_I + \omega_I t) + k_{II} = a_{11} b (L_I \cos\omega_I t - K_I \sin\omega_I t) + K_{II}$$

Die Konstanten bestimmen sich aus dem Anfangszustand folgendermaßen:

$$K_I = \frac{y_{10}}{b_{12}\omega_I}, \qquad L_I = \frac{\dot y_{10}}{b_{12}\omega_I^2},$$
$$K_{II} = y_{20} - \frac{b_{21}\dot y_{10}}{a_{22}\omega_I^2}$$

§ 8. $a_{11}\ddot y_1 + b_{11}\dot y_1 + c_{11} y_1 + a_{12}\ddot y_2 + b_{12}\dot y_2 + c_{12} y_2 = 0,$ $a_{21}\ddot y_1 + b_{21}\dot y_1 + c_{21} y_1 + a_{22}\ddot y_2 + b_{22}\dot y_2 + c_{22} y_2 = 0.$

Durch den Ansatz:

(1)
$$y_1 = r_1 k e^{nt},$$
$$y_2 = r_2 k e^{nt},$$

gehen die Differentialgleichungen über in

(2)
$$f_{11}(n) r_1 + f_{12}(n) r_2 = 0,$$
$$f_{21}(n) r_1 + f_{22}(n) r_2 = 0,$$

wobei

(2a)
$$f(n) = a n^2 + b n + c$$

Die homogenen Gl (2) sind nur lösbar, falls:

(3)
$$\begin{vmatrix} f_{11}(n) & f_{12}(n) \\ f_{21}(n) & f_{22}(n) \end{vmatrix} = 0.$$

Setze ich (2a) in (3) ein und führe die folgenden Abkürzungen ein:

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(4) $$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} \\ c_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & c_{12} \\ b_{21} & c_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & b_{12} \\ c_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

so kann ich schreiben.

(5) $$A_0 n^4 + A_1 n^3 + A_2 n^2 + A_3 n + A_4 = 0.$$

Aus der 1. Gl (2) ergibt sich dann

(7) $$r_1 = + f_{12}(n), \quad r_2 = - f_{11}(n)$$

Bezüglich der Diskussion der Gl (5) vergleiche den folgenden Paragraph

Es sind 3 Fälle zu unterscheiden:

A Alle n sind komplex Ich setze dann $n = \beta + i\omega$. Dann ist nach (7)

$$r_1 = + [a_{12}(\beta^2 - \omega^2) + b_{12}\beta + c_{12}] + i\omega[2a_{12}\beta + b_{12}],$$
$$r_2 = - [a_{11}(\beta^2 - \omega^2) + b_{11}\beta + c_{11}] - i\omega[2a_{11}\beta + b_{11}]$$

Setze ich nun: $$r_1 = + |r_1| e^{i\varrho_1}, \quad r_2 = - |r_2| e^{i\varrho_2},$$

so ist

$$|r_1| = \sqrt{[a_{12}(\beta^2 - \omega^2) + b_{12}\beta + c_{12}]^2 + [2a_{12}\beta + b_{12}]^2\omega^2},$$
$$|r_2| = \sqrt{[a_{11}(\beta^2 - \omega^2) + b_{11}\beta + c_{11}]^2 + [2a_{11}\beta + b_{11}]^2\omega^2},$$

(7a) $$\begin{cases} \operatorname{tg}\varrho_1 = \dfrac{\omega(2a_{12}\beta + b_{12})}{a_{12}(\beta^2 - \omega^2) + b_{12}\beta + c_{12}}, \\ \operatorname{tg}\varrho_2 = \dfrac{\omega(2a_{11}\beta + b_{11})}{a_{11}(\beta^2 - \omega^2) + b_{11}\beta + c_{11}} \end{cases}$$

Führe ich nun noch statt der komplexen Integrationskonstanten k von (1) 2 reelle Konstanten k und $\varkappa$ ein, so lautet die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichungen.

$$(8A)\quad \begin{cases} y_1 = +|r_{1I}|\, k_I e^{\beta_I t} \sin(\varrho_{1I} + \varkappa_I + \omega_I t) \\ \qquad + |r_{1II}|\, k_{II} e^{\beta_{II} t} \sin(\varrho_{1II} + \varkappa_{II} + \omega_{II} t), \\ y_2 = -|r_{2I}|\, k_I e^{\beta_I t} \sin(\varrho_{2I} + \varkappa_I + \omega_I t) \\ \qquad - |r_{2II}|\, k_{II} e^{\beta_{II} t} \sin(\varrho_{2II} + \varkappa_{II} + \omega_{II} t). \end{cases}$$

B. 2 Wurzeln n sind komplex, 2 reell Die Lösungen lauten dann

$$(8B)\quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I e^{n_I t} + r_{1II} k_{II} e^{n_{II} t} + r_1 k e^{\beta t} \sin(\varrho_1 + \varkappa + \omega t), \\ y_2 &= r_{2I} k_I e^{n_I t} + r_{2II} k_{II} e^{n_{II} t} + r_2 k e^{\beta t} \sin(\varrho_2 + \varkappa + \omega t). \end{aligned}$$

C Alle Wurzeln n sind reell. Die Lösungen lauten dann

$$(8C)\quad \begin{aligned} y_1 &= r_{1I} k_I e^{n_I t} + r_{1II} k_{II} e^{n_{II} t} + r_{1III} k_{III} e^{n_{III} t} + r_{1IV} k_{IV} e^{n_{IV} t}, \\ y_2 &= r_{2I} k_I e^{n_I t} + r_{2II} k_{II} e^{n_{II} t} + r_{2III} k_{III} e^{n_{III} t} + r_{2IV} k_{IV} e^{n_{IV} t}. \end{aligned}$$

Sind die beiden Wurzeln n_I und n_{II} einander gleich, so kann man die beiden Partikularlösungen folgendermaßen zusammenfassen

$$\begin{aligned} y_{1I} + y_{1II} &= r_{1I}(k_I + k_{II})\, e^{n_I t}, \\ y_{2I} + y_{2II} &= r_{2I}(k_I + k_{II})\, e^{n_I t} \end{aligned}$$

Die beiden Integrationskonstanten k_I und k_{II} ziehen sich also in eine Konstante zusammen Es geht also eine Integrationskonstante verloren Ich nehme nun zunächst einmal an, die beiden Wurzeln wären wenig voneinander verschieden und schreibe

$$n_{II} = n_I + \varepsilon$$

Nach (7) und dem Taylorschen Satz ist dann

$$r_{1II} = f_{12}(n_{II}) = f_{12}(n_I) + \varepsilon \frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_{12}(n_I)}{\partial n_I^2}$$

Die Summe der beiden Partikularlösungen ist dann also

$$\begin{aligned} y_{1I} + y_{1II} &= f_{12}(n_I)\, k_I e^{n_I t} \\ &+ \left(f_{12}(n_I) + \varepsilon \frac{\partial f_{12}(n_1)}{\partial n_I} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_{12}(n_I)}{\partial n_I^2}\right) k_{II} e^{n_I t} e^{\varepsilon t} \end{aligned}$$

Nun entwickle ich auch noch $e^{\varepsilon t}$

$$y_{1I} + y_{1II} = \left\{k_I f_{12}(n_I) + k_{II}\left(f_{12}(n_I) + \varepsilon \frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_{12}(n_I)}{\partial n_I^2}\right)\right.$$
$$\left.\left(1 + \frac{\varepsilon t}{1!} + \frac{\varepsilon^2 t^2}{2!} + \cdot\ \cdot\right)\right\} e^{n_I t},$$

$$y_{1I} + y_{1II} = \left\{(k_I + k_{II}) f_{12}(n_I) + \varepsilon k_{II}\left(\frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + f_{12}(n_I) t\right) + \ldots\right\} e^{n_I t}.$$

Ich führe neue Konstanten ein

$$k_I + k_{II} = k_1,$$
$$\varepsilon k_{II} = k_2.$$

Wird nun ε unendlich klein, so kann ich mir die willkürlichen Konstanten k_I und k_{II} derart unendlich groß denken, daß k_1 und k_2 endlich bleiben Die obige Reihe bricht dann mit den hingeschriebenen Gliedern ab

$$y_{1I} + y_{1II} = +\left\{k_1 f_{12}(n_I) + k_2\left(\frac{\partial f_{12}(n_I)}{\partial n_I} + f_{12}(n_I)\, t\right)\right\} e^{n_I t}$$

Entsprechend folgt

$$y_{2I} + y_{2II} = -\left\{k_1 f_{21}(n_I) + k_2\left(\frac{\partial f_{21}(n_I)}{\partial n_I} + f_{21}(n_I)\, t\right)\right\} e^{n_I t}$$

In diesen Lösungen kommen nun wieder die erforderlichen 2 Integrationskonstanten vor

§ 9. Tabellen für die Gleichung 4. Grades.

Nach dem vorigen § hängt die Integration der Differentialgleichung von der Auflösung der Gl 4. Grades ab Die Auflösung einer solchen Gleichung ist aber bekanntlich eine umständliche Sache und gibt unübersichtliche Resultate Nun ist es zunächst von Wichtigkeit, zu wissen, ob die Wurzeln reell oder komplex sind, denn im letzten Falle kommt eine wirkliche Schwingung zustande, im 1 Falle eine aperiodische Bewegung Diese Frage kann man jedoch nach dem Sturmschen Satz entscheiden, ohne die Gleichung wirklich auflösen zu müssen Auch die Anwendung des Sturmschen Satzes erfordert einen ziemlichen Rechenaufwand Ich habe die Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt, die je nach den Vorzeichen der d, b, c die Anzahl n der reellen Wurzeln angibt Verschwindet eine der Größen d, b, c, so müssen, wie die Tabelle zeigt, noch weitere Größen berechnet werden

d	b	c	n	= Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung
>0	>0	>0	4	$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$
		<0	0	
	<0		0	wenn zur Abkürzung gesetzt ist.
<0			2	$b = 3a_1^2 - 8a_2$
$d = 0$, $c \neq 0$	$D > 0$		4	$b_1 = 2(a_1 a_2 - 6a_3)$
	$D < 0$		2	$b_2 = a_1 a_3 - 16 a_4$
$c = 0$	$c_1 \neq 0$	$b > 0$	2	$c = b(3a_1 b_1 - 2a_2 b + 4b_2) - 4b_1^2$
		$b < 0$	0	$c_1 = b(3a_1 b_2 - a_3 b) - 4b_1 b_2$
	$c_1 = 0$	$D' \geqq 0$	4	$d = c_1(b_1 c - b c_1) - b_2 c_2$
		$D' < 0$	0	
$b = 0$	$b_1 \neq 0$	$c' > 0$	2	$D = 4a_1 c c_1 - 8c_1^2 + (a_1^2 - 4a_2) c^2$
		$c' < 0$	0	$D' = b_1^2 - 4 b b_2$
		$c' = 0$, $D'' \geqq 0$	4	$c' = b_1^2(-a_3 b_1 + 2a_2 b_2) + b_2^2(-3a_1 b_1 + 4b_2)$
		$c' = 0$, $D'' < 0$	2	$D'' = 4a_1 b_1 b_2 - 8b_2^2 + (a_1^2 - 4a_2) b_1^2$
	$b_1 = 0$	$b_2 > 0$	2	
		$b_2 < 0$	0	
		$b_2 = 0$	4	

Sind die Wurzeln komplex, so ist es ferner von Wichtigkeit, zu wissen, ob der reelle Teil positiv, negativ oder Null ist, denn im 1. Falle haben wir eine Schwingung mit zunehmender, im 2 Falle eine mit abnehmender Amplitude und im 3 Falle eine ungedampfte Schwingung. Auch diese Frage kann entschieden werden, ohne die Gleichung auflosen zu mussen, namlich mit Hilfe des Cauchyschen Residuensatzes Da aber auch hier ein ziemlicher Rechenaufwand erforderlich ist, habe ich die Resultate in der folgenden Tabelle zusammengestellt, die angibt, wieviel Wurzeln mit positivem, wieviel mit negativem und wieviel ohne reellen Bestandteil vorhanden sind

Es sind also die reellen Bestandteile aller 4 Wurzeln negativ, falls

$$a_4 > 0, \quad a_1 > 0, \quad e > 0, \quad g < 0,$$

oder anders geschrieben, falls

$$a_1 > 0, \quad a_4 > 0; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

a_4	a_1	e	g	Anzahl der Wurzeln mit pos.	ohne	mit neg.
				reellen Bestandteil		
−	−	−, 0		3	0	1
		+	−	3	0	1
			+	1	0	3
			0	1	2	1
	+	−	−	1	0	3
			+	3	0	1
			0	1	2	1
		+, 0		1	0	3
	0	−		3	0	1
		+		1	0	3
		0		1	2	1
+	−	−	−	4	0	0
			+	2	0	2
			0	2	2	0
		+, 0		2	0	2
	+	−, 0		2	0	2
		+	−	0	0	4
			+	2	0	2
			0	0	2	2
	0	−, 0		2	0	2
		0	a_2 | h			
			−, 0 |	2	0	2
			+ | −	2	0	2
			+ | +, 0	0	4	0

der Gleichung $x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$

wenn $e = a_1 a_2 - a_3$

$g = a_3^2 + a_1^2 a_4 - a_1 a_2 a_3$

$h = a_2^2 - 4 a_4$

Diese Bedingungen hat Hurwitz auf Gleichung n^{ten} Grades verallgemeinert [Mathem Annalen 46 (1875)]

Die Auflosung der biquadratischen Gleichung mit Hilfe der kubischen Resolvente empfiehlt sich nur dann, wenn die kubische Resolvente kein absolutes Glied besitzt. Die Bedingung hierfur ist

$$a_1^3 - 4 a_1 a_2 + 8 a_3 = 0 .$$

Wurzeln der Gleichung:
$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$,
für den Spezialfall.
$a_1^3-4a_1a_2+8a_3=0$,
wenn zur Abkürzung gesetzt wird:
$R_1=4\frac{a_3}{a_1}-\frac{1}{4}a_1^2$,
$R_2=4\left[\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2-a_4\right]$.

R_2	$R_1^2-4R_2$	R_1	
+	+	+	$x_{1,2,3,4}=-\frac{1}{4}a_1\pm\frac{i}{2}\sqrt{R_1\pm2\sqrt{R_2}}$
+	+	−	$x_{1,2,3,4}=-\frac{1}{4}a_1\pm\frac{1}{2}\sqrt{-R_1\pm2\sqrt{R_2}}$
+	0	+	$x_1=x_2=-\frac{1}{4}a_1,\quad x_{3,4}=-\frac{1}{4}a_1\pm\frac{i}{2}\sqrt{R_1+2\sqrt{R_2}}$
+	0	−	$x_1=x_2=-\frac{1}{4}a_1,\quad x_{3,4}=-\frac{1}{4}a_1\pm\frac{1}{2}\sqrt{-R_1+2\sqrt{R_2}}$
+	−		$x_{1,2}=-\frac{1}{4}a_1\pm\frac{i}{2}\sqrt{R_1+2\sqrt{R_2}},\quad x_{3,4}=-\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{2}\sqrt{-R_1+2\sqrt{R_2}}$
0		+	$x_{1,2}=x_{3,4}=-\frac{1}{4}a_1\pm\frac{i}{2}\sqrt{R_1}$
0		0	$x_1=x_2=x_3=x_4=-\frac{1}{4}a_1$
0		−	$x_{1,2}=x_{3,4}=-\frac{1}{4}a_1\pm\frac{1}{2}\sqrt{-R_1}$
−			$x_{1,2,3,4}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{1}{2}R_1+\frac{1}{2}\sqrt{R_1^2-4R_2}}-\frac{1}{4}a_1\pm\frac{i}{2}\sqrt{+\frac{1}{2}R_1+\frac{1}{2}\sqrt{R_1^2-4R_2}}$

Dieser Spezialfall ist für uns wichtig, da die beiden Schwingungen dann entweder von gleicher Dämpfung oder von gleicher Frequenz sind. Ich habe die Resultate in der dritten Tabelle zusammengeschrieben.

§ 10. Die Lagrangeschen Gleichungen 2. Form.

Es sei E eine Funktion von $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$ und K_1, K_2 seien Funktionen von $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2$. Ich entwickle nach Potenzen und breche die Entwicklung von E nach den quadratischen Gliedern, die Entwicklung von K_1 und K_2 nach den linearen Gliedern ab.

$$
(1)\quad \begin{cases}
E = E_0 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial y_2}\right)_0 y_2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_1}\right)_0 \dot{y}_1 + \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_2}\right)_0 \dot{y}_2 \\
\quad + \frac{1}{2}\Big[\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right)_0 y_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_1 y_2 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2}\right)_0 y_2^2 \\
\quad + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_1^2}\right)_0 \dot{y}_1^2 + 2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_1 \partial \dot{y}_2}\right)_0 \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \dot{y}_2^2}\right)_0 \dot{y}_2^2 + 2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_1}\right)_0 y_1 \dot{y}_1 \\
\quad + 2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2}\right)_0 y_1 \dot{y}_2 + 2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_1}\right)_0 y_2 \dot{y}_1 + 2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_2}\right)_0 y_2 \dot{y}_2\Big]
\end{cases}
$$

$$
(2)\quad \begin{cases}
K_1 = K_{10} + \left(\frac{\partial K_1}{\partial y_1}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial K_1}{\partial y_2}\right)_0 y_2 \\
\quad + \left(\frac{\partial K_1}{\partial \dot{y}_1}\right)_0 \dot{y}_1 + \left(\frac{\partial K_1}{\partial \dot{y}_2}\right)_0 \dot{y}_2 + \left(\frac{\partial K_1}{\partial \ddot{y}_1}\right)_0 \ddot{y}_1 + \left(\frac{\partial K_1}{\partial \ddot{y}_2}\right)_0 \ddot{y}_2, \\
K_2 = K_{20} + \left(\frac{\partial K_2}{\partial y_1}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial K_2}{\partial y_2}\right)_0 y_2 \\
\quad + \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{y}_1}\right)_0 \dot{y}_1 + \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{y}_2}\right)_0 \dot{y}_2 + \left(\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{y}_1}\right)_0 \ddot{y}_1 + \left(\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{y}_2}\right)_0 \ddot{y}_2
\end{cases}
$$

Nun bilde ich die Gleichungen

$$
(3)\quad \begin{cases}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial y_1} = K_1, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{y}_2}\right) - \frac{\partial E}{\partial y_2} = K_2
\end{cases}
$$

Es ergibt sich:

$$
(4)\quad\left\{\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right)_0 y_1 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_2 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_1}\right)_0 \dot{y}_1 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_2 \\
&\qquad - \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right)_0 y_1 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_2 \\
&\qquad - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_1}\right)_0 y_1 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \dot{y}_2}\right)_0 y_2 = K_1 , \\
&\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2}\right)_0 \ddot{y}_2 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial \ddot{y}_2}\right)_0 \ddot{y}_1 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial y_2}\right)_0 y_2 + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial y_1}\right)_0 y_1 \\
&\qquad - \left(\frac{\partial E}{\partial y_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2}\right)_0 y_2 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 y_1 \\
&\qquad - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial y_2}\right)_0 y_2 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_1}\right)_0 y_1 = K_2
\end{aligned}\right.
$$

Vergleiche ich diese Gleichung mit der Diffgl. § 8, so ist

$$
(5)\qquad \left(\frac{\partial E}{\partial y_1}\right)_0 + K_{10} = 0 , \qquad \left(\frac{\partial E}{\partial y_2}\right)_0 + K_{20} = 0
$$

$$
(6)\left\{\begin{array}{ll}
\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_1}{\partial \ddot{y}_1}\right)_0 = a_{11} , & \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_1}{\partial \ddot{y}_2}\right)_0 = \text{[illegible]} \\
- \left(\frac{\partial K_1}{\partial y_1}\right)_0 = b_{11} , & \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial y_1}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_1}{\partial y_2}\right)_0 = \text{[illegible]} \\
- \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_1}{\partial y_1}\right)_0 = c_{11} , & - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_1}{\partial y_2}\right)_0 = \text{[illegible]} \\
\left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_2}{\partial y_2}\right)_0 = a_{22} , & \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_2}{\partial \ddot{y}_1}\right)_0 = a \\
- \left(\frac{\partial K_2}{\partial y_2}\right)_0 = b_{22} , & \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2 \partial \dot{y}_1}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_2}{\partial y_1}\right)_0 = b \\
- \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_2^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_2}{\partial y_2}\right)_0 = c_{22} , & - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial y_1 \partial y_2}\right)_0 - \left(\frac{\partial K_2}{\partial y_1}\right)_0 = c.
\end{array}\right.
$$

Bei mechanischen Schwingungen ist E die kinetische Energie und K_1, K_2 sind die Lagrangeschen Kraftkomponenten (Hamel:

I. Nr. 329). Ist $\left(\frac{\partial K_1}{\partial y_2}\right)_0 = \left(\frac{\partial K_2}{\partial \dot{y}_1}\right)_0 = 0$, so ist nach (6) $-b_{21}$. Das ist in den folgenden Beispielen der Fall

Räumliches Pendel (Hamel: El. M. Nr. 67) Es ist (Abb. 35)

$$E = \tfrac{1}{2} m l^2 \sin^2(\alpha + \varphi_1)(\omega + \varphi_2)^2 + \tfrac{1}{2} m l^2 \varphi_1^2,$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}\right)_0 = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \sin 2\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_1^2}\right)_0 = m l^2,$$

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_1^2}\right)_0 = m l^2 \omega^2 \cos 2\alpha,$$

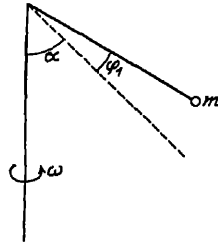
$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_1 \, \partial \varphi_2}\right)_0 = m l^2 \omega \sin 2\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \varphi_2^2}\right)_0 = m l^2 \sin^2 \alpha,$$

$$K_1 = -mgl \sin(\alpha + \varphi_1),$$

$$K_{10} = -mgl \sin \alpha,$$

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial \varphi_1}\right)_0 = -mgl \cos \alpha$$

Abb. 35.

h (5) und (6) ist daher

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}},$$

$$a_{11} = m l^2,$$

$$c_{11} = -m l^2 \omega^2 \cos 2\alpha + mgl \cos \alpha = \frac{mgl \sin^2 \alpha}{\cos \alpha},$$

$$a_{22} = m l^2 \sin^2 \alpha,$$

$$b_{12} = -b_{21} = -m l^2 \omega \sin 2\alpha = -2 m l \sin \alpha \sqrt{g l \cos \alpha}$$

Schiff mit Schiffskreisel (Hamel El M Nr. 332, Hort: v § 83, Foppel T M VI, 220)
Elektron im magnetischen Felde (Hort T Schw § 121).
Zentrifugalregulator (Hort T Schw § 60)
Schwingendes Luftfahrzeug (Hort T Schw § 70)